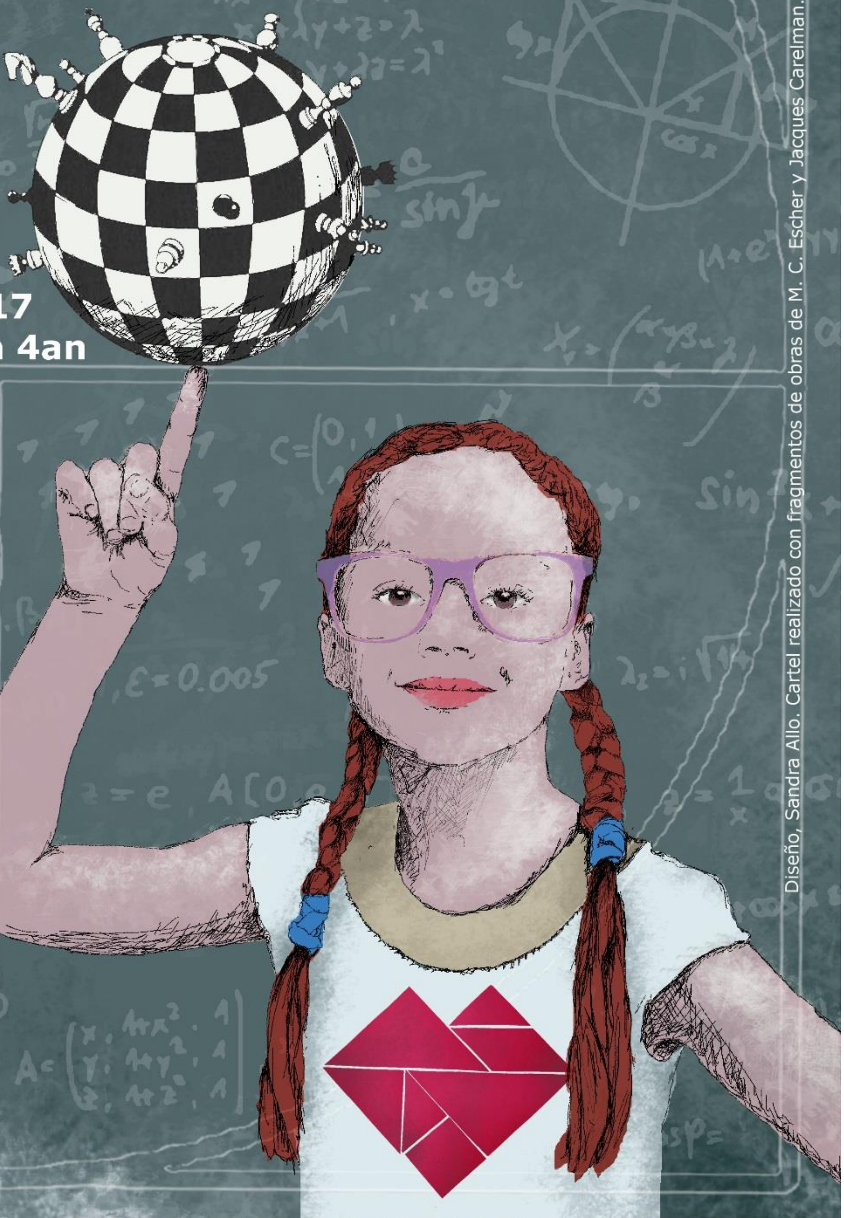
V JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN NAVARRA

MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZARAKO V JARDUNALDIAK NAFARROAN

Aulario de la UPNA
NUPeko ikasgelategian

3 y 4 de noviembre de 2017
2017ko azaroaren 3an eta 4an



Diseño, Sandra Allo. Cartel realizado con fragmentos de obras de M. C. Escher y Jacques Carelman.

Organizan:
Antolatzen dute:

Gobierno de Navarra
Departamento de Educación

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira
Matematika Irakasleen Nafar Elkartea

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Colaboran:
Laguntzen dute:

Fundación Cajanavarra

CASIO
División Educativa

ANAYA

V jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra
LIBRO DE ACTAS

Matematikaren irakaskuntzarako V Jardunaldiak Nafarroan
AKTEN LIBURUA

V jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra
LIBRO DE ACTAS

Matematikaren irakaskuntzarako V Jardunaldiak Nafarroan
AKTEN LIBURUA

Jesús Javier Jiménez, Aitzol Lasa (Ed.)

Asociación Tornamira de profesores de matemáticas de Navarra
Gobierno de Navarra
Universidad Pública de Navarra
3 y 4 de noviembre de 2017
Aulario de la Universidad Pública de Navarra

Nafarroako matematika irakasleen Tornamira elkartea
Nafarroako Gobernua
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
2017ko azaroaren 3an eta 4an
Nafarroako Unibertsitate Publikoko Ikasgelategia

V jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra, LIBRO DE ACTAS

Matematikaren irakaskuntzarako V Jardunaldiak Nafarroan, AKTEN LIBURUA

Comité científico y organizador:
Jesús Javier Jiménez (coordinador)
Presidente Tornamira
David Fernández e Idoia Sara
CAP Pamplona, Gobierno de Navarra
Aitzol Lasa
Universidad Pública de Navarra

Zientzia eta antolakuntza komitea:
Jesús Javier Jiménez (koordinatzailea)
Tornamirako Presidentea
David Fernández eta Idoia Sara
Iruñeko ILZ, Nafarroako Gobernua
Aitzol Lasa
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Edición científica:
Universidad Pública de Navarra

Edizio zientifikoa:
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Diseño de cartel y portada:
Sandra Allo
Cartel realizado con fragmentos de obras de M.C. Escher y J. Carelman.

Kartelaren eta azalaren diseinua:
Sandra Allo
M.C. Escher eta J. Carelmanen lanen zatiekin egindako kartela.

ISBN:
978-84-09-08900-0

Cítese como:
Jiménez, J.J., Lasa, A. (2018). *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*. Pamplona: UPNA.

Honela aipa dezakezu:
Jiménez, J.J., Lasa, A. (2018). *Matematikaren irakaskuntzarako V jardunaldiak Nafarroan*. Iruña: NUP.

ÍNDICE

CONFERENCIAS PLENARIAS

SELECCIÓN DE COMUNICACIONES

Saludo del Presidente de Tornamira

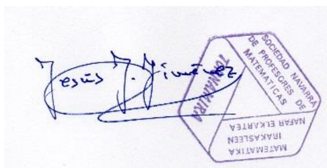
Los pasados días 3 y 4 de noviembre el Aulario de la Universidad Pública de Navarra albergó las V Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Navarra. Una vez más, la estrecha colaboración entre CAP-Pamplona, UPNA y TORNAMIRA ha sido fundamental para hacer posible este evento, que no olvidemos su principal finalidad es lograr un lugar de encuentro para docentes desde la etapa de Educación Infantil hasta la Universitaria, un foro de comunicación de trabajos, experiencias e inquietudes del profesorado de matemáticas en nuestra comunidad, así como un elemento más que contribuya a transmitir y a hacer visible la cultura matemática en la sociedad navarra. El apoyo institucional reflejado en al acto inaugural con la presencia de Alfonso Carlosena (Rector de la UPNA) y Mª Roncesvalles Solana Arana (Consejera de Educación), así como el éxito de asistencia del profesorado de los distintos niveles educativos (unos 200 profesores participaron en las jornadas) nos hace pensar en una consolidación de esta actividad en nuestra comunidad.

La actividad matemática ha tenido desde siempre un componente lúdico que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones que en ella han surgido. Mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar. En esta edición, hemos querido acercarnos a esos recursos que hacen que unas matemáticas divertidas sean posibles en nuestras aulas, sean elementos de motivación para nuestro alumnado y proporcionen una forma distinta a la tradicional de acercarse al aprendizaje de las matemáticas.

En esta Edición hemos tenido la suerte de contar con dos grandes divulgadores de las matemáticas, tanto a nivel nacional como internacional. La conferencia inaugural, "La Seducción Matemática", corrió a cargo de Claudi Alsina y la de clausura, "Un teorema llamado deseo", a cargo de Eduardo Sáenz de Cabezón. Hemos disfrutado también con 10 talleres dispuestos en dos bandas horarias así como 18 comunicaciones en sesiones paralelas, que han cubierto un amplio abanico de temas tratados, de distintos niveles educativos, tanto en euskera como en castellano. El I concurso de microrrelatos irracionales y una exposición de juegos extraídos de la revista SUMA han sido las actividades complementarias incluidas en el programa de estas V jornadas.

Por último quería mostrar mi agradecimiento a todos las personas o entidades que han colaborado de una u otra forma para hacer realidad este evento. Hasta la próxima edición.

Jesús Javier Jiménez Ibáñez



Presidente de TORNAMIRA

SELECCIÓN DE COMUNICACIONES

El juego como recurso didáctico en el aula[1]

Rita Jiménez Igea (IES Tomás Mingot, Logroño)

Resumen

En este taller se presentan actividades, en formato de juego, que pretenden ayudar a afianzar y repasar conceptos y algoritmos del currículo de matemáticas. El atractivo que los juegos ejercen sobre los niños hace que aumente su motivación por ellos. Desde el año 2000 trabajo creando juegos de mesa variados para el aula: de tablero, de cartas y con ordenador. La mayor parte corresponden al currículo de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), pero los hay también para niveles de Bachillerato y de Educación Primaria (EP), e implican casi todos los bloques temáticos de la asignatura. Se presenta una selección de los puestos en práctica, algunos de los cuales forman parte del material que recibió, en 2003, el *1er Premio de Innovación e Investigación Educativa* de la Comunidad Autónoma de La Rioja.

Palabras clave

Juegos matemáticos, motivación y actividad lúdica, ejercitación de algoritmos.

Introducción

Los profesores nos solemos quejar de la falta de motivación de nuestros alumnos, de la dificultad que tienen para comprender algunos conceptos y de las programaciones demasiado extensas. Por otra parte, existen muchos juegos de ingenio y de estrategia que suponen actividad matemática pero no nos ayudan de forma directa a trabajar los contenidos de nuestros programas. Los juegos que se presentan a continuación, sí trabajan contenidos que debemos impartir. Se presentan a continuación dos juegos de tablero, dos de cartas y dos con ordenador.

1 Juego de las compras

Se trata de un juego de tablero pensado para 3 jugadores que se puede llevar al aula en los últimos cursos de EP y en primer ciclo de ESO. Los contenidos que se trabajan son: la fracción como operador, descuentos y recargos, operaciones con números decimales y los números enteros. Requiere de los siguientes recursos materiales:

- Un tablero, similar al de la figura 1.
- Tres fichas con un color para cada jugador.
- Un dado.
- Tarjetas con descuentos y recargos, similares a las de la figura 2.
- Uso opcional de un albarán para el registro de cómputos de compra.
- Uso opcional de la calculadora.

Las reglas del juego son las siguientes: Cada jugador posee 4 tiendas asignadas al azar al principio de la partida; lanzan el dado por turnos y mueven su ficha, empezando de la casilla de salida; si un jugador entra en la tienda de un contrario, se levanta una de las tarjetas, y el jugador ha de comprar el artículo de la tienda al dueño de la casilla, fijando el precio final en función del precio de la casilla y del descuento o recargo descrito en la tarjeta que se ha levantado.

[1] Jiménez, R. (2018). El juego como recurso didáctico en el aula. En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 11-19. Pamplona: UPNA.

Figura 1. Tablero del Juego de las compras.

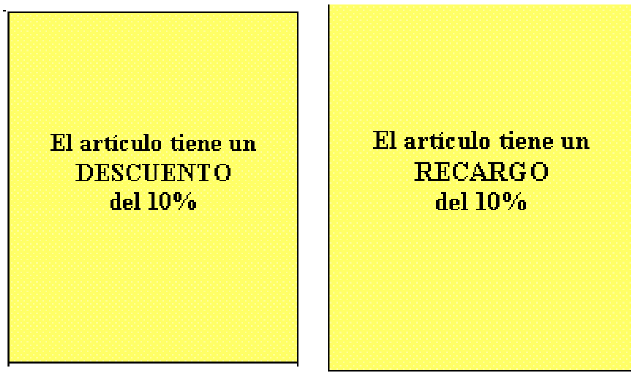


Figura 2. Tarjetas del juego de las compras.

El objetivo del juego consiste en vender al máximo y gastar lo menos posible, y la partida termina cuando todos han llegado a la meta. Al final de la partida se hace un balance de ventas y compras de cada jugador y gana el jugador con más ganancias. Se entiende que un jugador entra en la casilla de meta cuando obtiene un resultado exacto o superior para llegar al él: por ejemplo, si un jugador tiene su ficha en la casilla 10, llegará a la meta si obtiene en el dado un resultado igual o superior a 3.

Esta regla de llegada a la meta es justa para todos los jugadores, pero en la práctica resulta en una partida rápida y no muy divertida. Como alternativa, se puede plantear como regla de llegada la obtención de un resultado exacto en el dado, similar al del *Juego de la oca*. Esta modificación da como resultado un desarrollo del juego que no es justo, ya que los jugadores que adueñan las últimas casillas (rojo, negro) tienen cierta ventaja sobre el jugador azul.

Sin embargo, se constata que con este final aumenta la motivación del alumno y resulta más divertido, y se puede utilizar la circunstancia para generando una discusión con los estudiantes: ¿Es un juego justo en ambos casos? No todos los estudiantes se dan cuenta, de manera espontánea, de que el juego con final de *Oca* no es justo; por ello, el debate sobre este tema es en sí misma una actividad matemática interesante. El docente debe pensar qué quiere priorizar y decidir en consecuencia el tipo de final.

El uso de albaranes (fichas de trabajo que el profesor entrega para que vayan calculando y anotando sus ventas y sus compras) y/o calculadora es opcional. Se recomiendan estos últimos con alumnos que tengan muchas dificultades de aprendizaje. Se presenta en la figura 3 un posible modelo de albarán.

2 El reparto

Es un juego de cartas que se puede llevar al aula en los últimos cursos de EP y en primer ciclo de ESO. Los contenidos que se trabajan son la fracción como operador, los porcentajes y las operaciones con números decimales. Se necesitan cartas de dos tipos: en la figura 4 se muestran seis cartas del primer tipo (cartas grandes), y en la figura 5 se muestran tres cartas del segundo tipo (cartas pequeñas). Se divide la clase en grupos de 3 o 4 alumnos y se les entrega el material. El primer jugador levanta una carta grande y una pequeña y debe calcular lo que le corresponde. Y así deben hacerlo por turnos el resto de jugadores. Gana el jugador que consiga más dinero cuando se hayan usado todas las tarjetas grandes.

Nombre y apellidos: **Curso:**	
Compras	**Ventas**
Precio inicial: Descuento: % Recargo: % Cálculo de descuento o recargo: Precio a pagar:	Precio inicial: Descuento: % Recargo: % Cálculo de descuento o recargo: Precio a pagar:
[Añadir cuantas filas sean necesarias]	

Figura 3. Modelo de albarán para cómputos de compraventa.

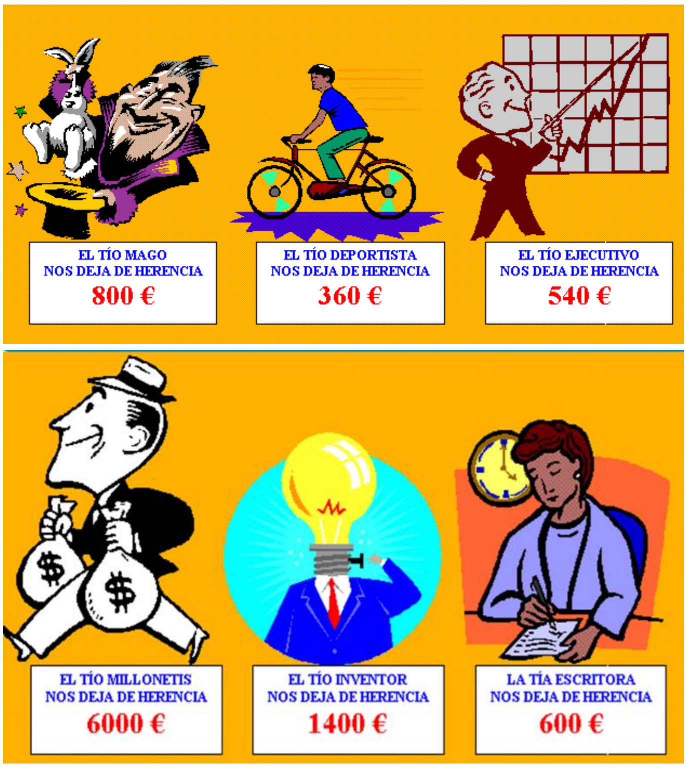


Figura 4. Cartas grandes juego del Reparto.

Te corresponde el 80% de la herencia	Te corresponde la cuarta parte de la herencia	Te corresponden los $\frac{3}{4}$ de la herencia

Figura 5. Cartas pequeñas juego del reparto.

Como posible variante, el profesor podrá decidir que el juego finalice después de un número de rondas prefijadas de antemano. Además, se puede facilitar a los alumnos reproducciones de billetes de euros para que reciban físicamente su herencia en cada jugada: de esta manera, aumenta la motivación. Los estudiantes deben validar sus cómputos y los de sus compañeros, para nadie hagan trampas. Como primera opción, se puede solicitar a todos los estudiantes que verifiquen los cálculos; como segunda opción, se puede facilitar a los estudiantes una hoja de cálculo con todas las posibles respuestas, y los alumnos que no juegan pueden verificar la respuesta dada, a modo de árbitro. La primera opción hace que todos trabajen y al finalizar el juego habrán realizado más ejercicios.

3 Euro-talleres

Juego de tablero pensado para 3 jugadores y que puede llevarse a clase en EP y primer ciclo de ESO. Los contenidos que se trabajan son: la noción de proporcionalidad directa y el algoritmo de la regla de tres directa. El tablero tiene 12 casillas y cada jugador posee las 4 casillas de su color. Se establece el turno, y el primer jugador lanza el dado y mueve su ficha. Si cae en el taller de un contrario debe pagar la factura realizando una regla de tres directa. Todos los datos vienen en la casilla del tablero: el resultado del dado nos da el número de horas que se ha necesitado para hacer el trabajo, y el valor X será el dinero a pagar por esas horas de trabajo. El resultado debe ser calculado tanto por el jugador que entra al taller, como por el propietario del mismo. Los jugadores deben anotar el dinero que reciben y que pagan. Al final de la partida (cuando todos han llegado a la meta) se hace un balance. Gana el jugador con más ingresos. El docente puede facilitar al estudiante una plantilla para que éste anote los resultados del juego. La figura 6 muestra un posible modelo de plantilla.

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre y apellidos:
Curso:</td></tr>
<tr><th>Pago de facturas</th><th>Cobro de facturas</th></tr>
<tr><td>El técnico cobra ____ € por ____ horas de trabajo.
Tú debes una factura de ____ horas.

Solución:</td><td>El técnico cobra ____ € por ____ horas de trabajo.
Tú vas a cobrar una factura de ____ horas.

Solución:</td></tr>
<tr><td colspan="2">[Añadir cuantas filas sean necesarias]</td></tr>
</table>

Figura 6. Modelo de plantilla para anotar resultados del juego.

Se presenta también una versión del juego en formato digital realizada en Descartes-JS para dos jugadores y con 10 casillas, que valida automáticamente las respuestas. En la figura 7 se pueden ver algunas jugadas: el jugador rojo ha calculado correctamente el dinero (7a), el jugador azul no ha contestado correctamente (7b), y finalmente, al terminar la partida se da el balance final (7c).

Figura 7. Posibles jugadas en la versión Descastes-JS: correcta (rojo), incorrecta (azul) y balance final.

4 La lotería

Juego de tablero para 3 jugadores que trabaja la noción de proporcionalidad inversa y el algoritmo de la regla de tres inversa, para alumnos de primer ciclo de ESO. Se requieren un tablero (figura 8), 3 fichas de colores y un dado. Se trata de un juego de características similares al anterior, *Euro-talleres*, pero que trabaja la proporcionalidad inversa, con ejercicios del siguiente tipo: “Se informa que hay cuatro acertantes de una quiniela, que van a cobrar 2000 euros cada uno. Finamente, resultan ser cinco los acertantes de la quiniela, por lo que el premio se reparte entre los cinco, ¿Cuánto cobrará realmente cada acertante?”; “Cinco amigos compran un regalo y ponen 20 euros cada uno, ¿Cuánto deberán poner si, al final, son seis los amigos que participan en el regalo?”.

En este tipo de problemas, es frecuente encontrar ciertos errores en los alumnos, que tienden a pensar que el premio aumenta al aumentar el número de acertantes, con lo cual, mantienen constante el dinero cobrado por el premio, o el dinero que cada amigo debe aportar para el regalo. Se debe explicar que lo que se mantiene constante es el premio en el primer caso, o el valor del regalo en el segundo. Por ello, puede ser interesante realizar alguna partida con este juego para que vean que cuando aumenta el número de acertantes disminuye el premio a recibir. Al ser el premio que ellos deben recibir suelen prestar más atención a las reglas del juego.

Sobre el final del juego y la forma de hacer la llegada a meta, pueden hacerse las mismas consideraciones que en el caso del *Juego de las compras*. Respecto a los materiales opcionales, se puede hacer uso de la calculadora y/o de albaranes o plantillas de trabajo. Es conveniente trabajar inicialmente sólo con números enteros para facilitar los cálculos.

Figura 8. Tablero del juego La lotería.

5 He pillado un…

Juego de cartas que se puede utilizar en primer ciclo de ESO y cuyo objetivo es reconocer elementos y figuras geométricas. Se tienen cartas de 2 tipos: cartas de preguntas y cartas de azar (figura 9).

Se puede jugar de distintas formas, y una de ellas es la siguiente: Los alumnos se distribuyen en grupos de 3 (o más), y se da a cada grupo una baraja de cartas que se coloca en el centro bocabajo; el primer jugador levanta una carta y debe decir “He pillado un/unas…” e indicar lo que la carta contiene; si acierta, gana lo marcado en la tarjeta; el siguiente jugador debe hacer lo mismo.

Si el jugador levanta la carta de una persona resfriada debe decir “He pillado un resfriado y pierdo la mitad del dinero acumulado”. Si levanta la carta de una pulmonía debe decir “He pillado una pulmonía y pierdo todo lo que tenía”, y pierde todo lo ganado hasta el momento. La partida acaba cuando se hayan levantado todas las cartas. Gana el jugador con más ingresos.

Es interesante dar una hoja con las respuestas correctas para facilitar la corrección, y conviene incluir en este juego reproducciones de billetes (figura 10) en un sobre que se colocará en el centro; así, los jugadores reciben físicamente su dinero, aumentando la motivación y el interés del alumno.

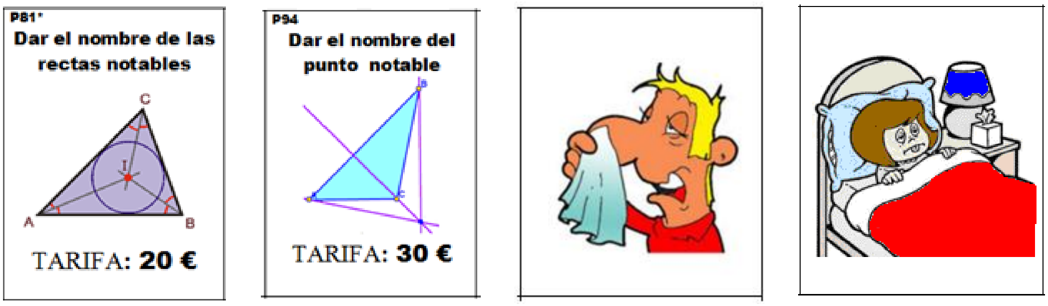


Figura 9. Cartas de pregunta y cartas de azar.

Figura 10. Billetes para el juego.

6 Gulliver se va de compras

Es un juego en formato digital para dos jugadores realizado con el programa Descartes-JS para trabajar la conversión de números de notación científica a notación decimal. Cada jugador es dueño de las casillas de su color. Hay tiendas con objetos muy caros (estamos comprando en Brobdingnag) y otras tiendas con objetos muy baratos (estamos comprando en Liliput). El precio está escrito en notación científica. Comienza el juego, el programa lanza el dado y el jugador debe mover su ficha hasta la casilla correspondiente. Si entra en una tienda del color del contrario debe comprar e indicar el precio en notación decimal. El programa corrige automáticamente la respuesta. Si es correcta el turno pasa a otro jugador.

El juego acaba cuando los dos jugadores han llegado a la meta. El programa calcula automáticamente el dinero conseguido y gastado por cada uno. Gana el jugador que haya reunido más dinero. Los precios cambian cada vez que se inicia el juego. En la figura 11 vemos: la portada del juego (11a); el jugador rojo ha sacado un 5 y debe mover la ficha hasta esa casilla (11b); como es la casilla de su contrario, el jugador rojo ha de comprar y debe dar el precio en notación decimal (11c); el jugador mueve su ficha pulsando en el botón correspondiente e introduce la respuesta. En la figura 11d se observa como el programa valida, automáticamente, la respuesta del estudiante.

Al final de la partida el programa indica cuánto ha ganado cada jugador (figura 12).

Figura 11. Portada del juego y algunas jugadas: juega el jugador rojo, respuesta correcta e incorrecta.

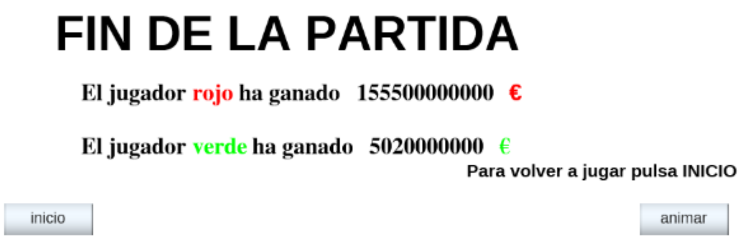


Figura 12. Balance final del juego *Gulliver se va de compras*.

Conclusiones

En clase los juegos gustan, y la motivación y el interés aumentan en el alumnado. La actividad deja de ser tediosa y se transforma en divertida. Como quieren ganar, se implican más en el proceso, porque se trata de *sus* compras y de *su* dinero. Mientras juegan, realizan con entusiasmo los cálculos. En general, conviene que las partidas no sean demasiado largas, siendo preferible que jueguen 2 o 3 partidas cortas, en lugar de una más larga. De esta forma, hay más ganadores y el interés no decae.

Se observa que con los juegos:

- Aumenta el sentido crítico de los estudiantes con respecto a los resultados que obtienen. De forma inconsciente hacen una estimación de lo que les toca ganar y, si el resultado les parece incoherente, cuestionan su validez.

- En un ambiente entre iguales, sin la intervención de un adulto, piensan en voz alta. Al interactuar con sus compañeros hablan de cómo deben realizarse los cálculos: en ocasiones se ayudan y corrigen entre ellos; otras veces debaten porque cada uno defiende su postura. Así afloran diferentes formas de abordar un problema o bien ideas mal comprendidas que deben corregirse. En ocasiones el profesor es el que finalmente zanja la cuestión.

Todo ello hace que terminen conociendo y utilizando diferentes estrategias de resolución de problemas. Valoran la importancia del orden y la claridad al hacer los ejercicios. En caso contrario no se puede repasar operaciones o hacer balance al terminar el juego. Reparan en la importancia de algunas cuestiones matemáticas como, por ejemplo, la coma en los resultados con números decimales. Comprenden perfectamente que no es lo mismo ganar 54,76 euros que 547,6 euros porque ese es el dinero que deben recibir.

Como contrapartida debemos estar dispuestos a que en clase haya algo más de ruido dado que manifiestan sus emociones, pero en general, llevados por la ilusión de ganar, terminan realizando más ejercicios de los que se hubieran realizado en una clase de formato convencional. Debemos tratar de presentar distintas actividades en el aula combinando ejercicios y problemas clásicos de los libros de texto con juegos, software, materiales manipulativos, prácticas de campo etc. La variedad y la novedad tienen muy buena acogida y estimula al alumno a buscar distintas estrategias de pensamiento matemático.

Referencias

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Hernán Siquero, F y Carrillo Quintela, E. (1988). *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Alcalá, M. (2002). *Los números enteros en la escuela*. Granada: Proyecto Sur Ediciones.

¿A qué jugamos hoy en clase de Mates?[2]

Rita Jiménez Igea (IES Tomás Mingot, Logroño)

Resumen

Se presenta un REA (Recurso Educativo Abierto) con sugerencias didácticas para usar en el aula escenas de Descartes-JS que contienen un juego o pasatiempo, y trabajar conceptos y contenidos del currículo de matemáticas, principalmente de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), aunque también aplicables a Educación Primaria (EP). Todas las escenas permiten jugar y/o simular el juego tantas veces se desee, pertenecen al Proyecto Descartes y están publicadas en Red Educativa Digital Descartes. ¿Quieres practicar las operaciones con enteros con los cuadrados mágicos y las estrellas de siete puntas? ¿Quieres saber qué famoso teorema te hará ganar al billar? ¿Quieres aprender geometría con el Tangram?, estos son algunos ejemplos del contenido del REA. Además, el REA incluye una página del profesor, enlaces a otras páginas con actividades lúdicas, la versión en formato juego de mesa de algunos de ellos lista para imprimir.

Palabras clave

Juegos digitales, materiales manipulativos, pasatiempos matemáticos, motivación, gamificación.

Introducción

Los niños tienen una tendencia natural al juego y debemos aprovecharla en nuestras aulas. En este recurso se presentan escenas que son un juego y al usarlas se están trabajando los contenidos: escenas a partir de las cuales se sugiere cómo crear puzles que permiten a los alumnos trabajar algunos conceptos; escenas que recrean un juego conocido y al plantear preguntas podemos descubrir las matemáticas que contiene ese juego y usarlas para ganar, etc.

Las escenas permiten una repetición y simulación de la situación que facilita que el alumno visualice y sea capaz de llegar a conclusiones, algunas corrigen la actividad de forma automática. En algunos casos las escenas pueden implementarse como un juego de mesa sin utilizar el ordenador, otras podemos ayudarnos y complementar la actividad con materiales manipulativos de fácil construcción.

1 El REA: ¿A qué quieres jugar en clase de mates?

Al abrir el REA se ve la página de inicio de la figura 1. Tenemos escenas de todos los bloques temáticos, a los que se puede llegar usando el menú principal (a izquierda de la pantalla) o pulsando en la imagen del juego (zona de la derecha).

Haremos un recorrido por el REA y daremos una breve descripción de sus secciones. En cualquier caso, se puede acceder al recurso en Internet en PROCOMÚN del INTEF y en el Portal Red Educativa Digital Descartes.

[2] Jiménez, R. (2018). ¿A qué jugamos hoy en clase de mates? En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 21-35. Pamplona: UPNA.

1.1 Juego de múltiplos y divisores

Esta escena es un juego de fácil ejecución cuyas reglas vemos en la figura 2ª, y la figura 2b muestra el desarrollo del juego. Con la ayuda del ratón, se retiran los números y la escena se corrige en caso de error.

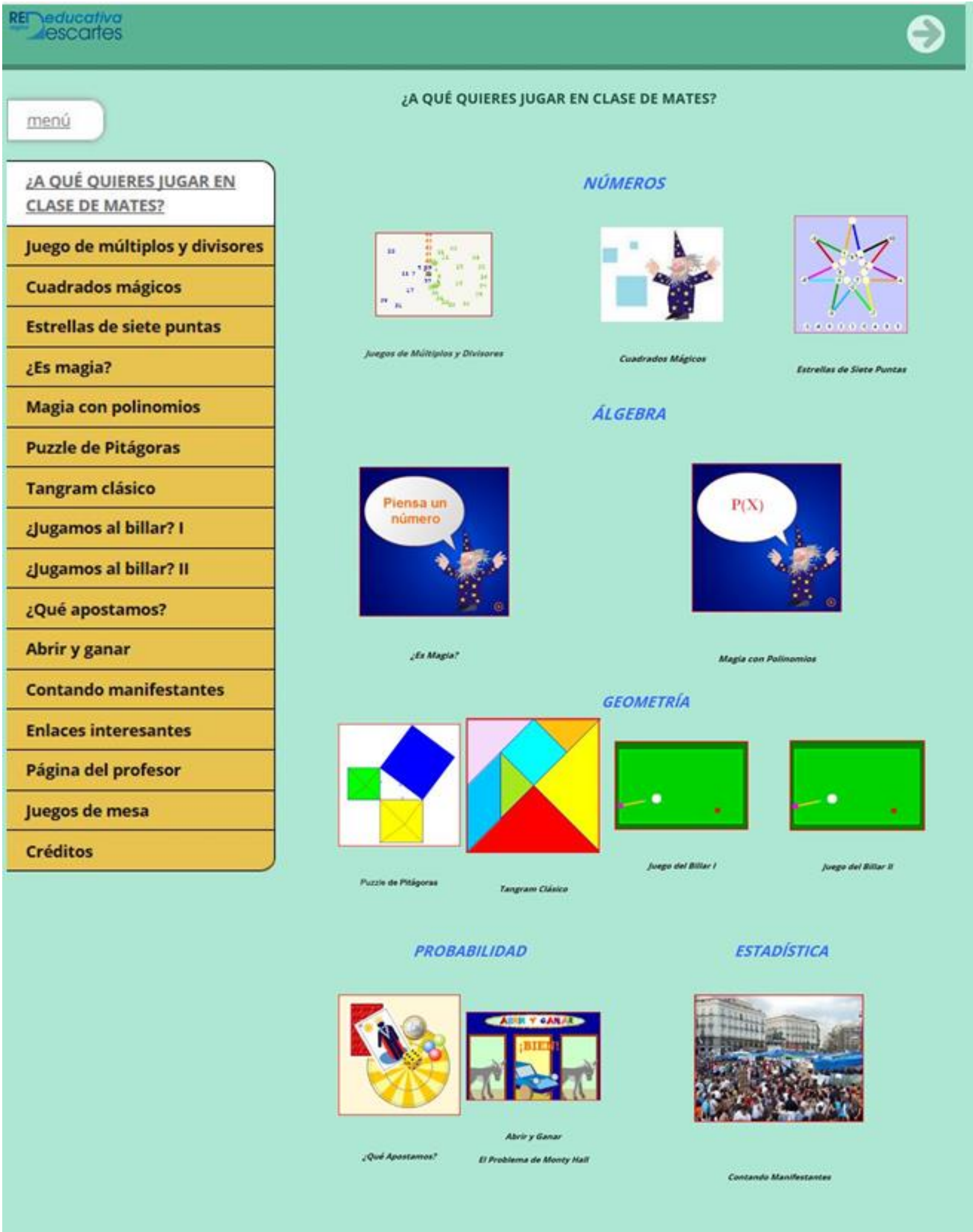


Figura 1. Página de inicio del REA ¿A qué quieres jugar en clase de mates?

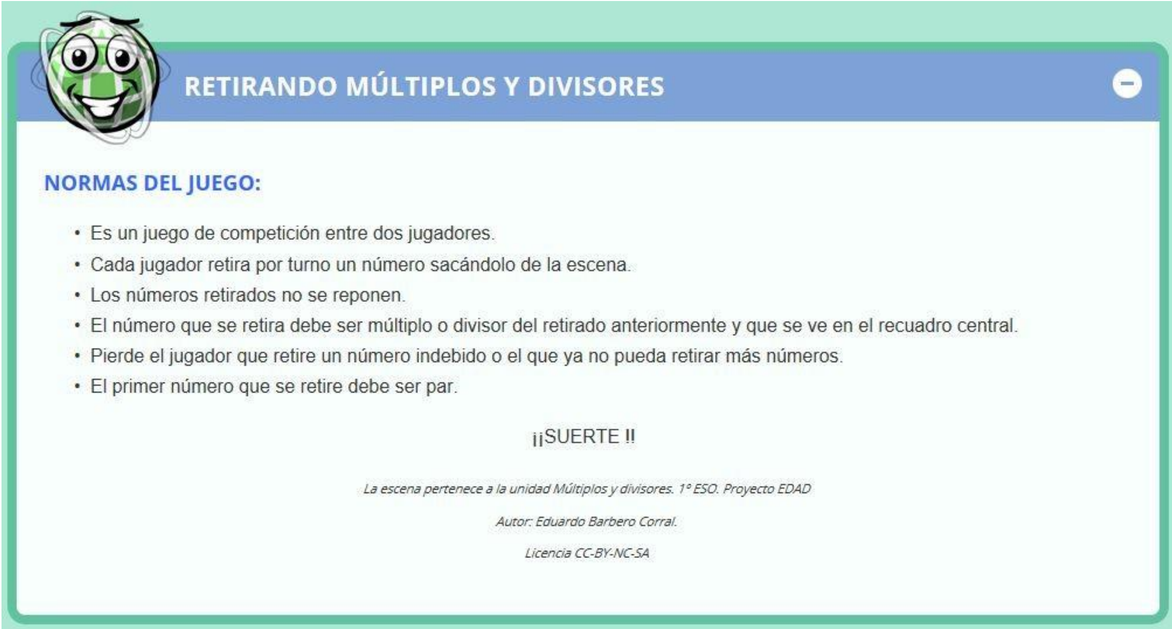


Figura 2. Reglas y desarrollo de juego *Retirando múltiplos y divisores*.

1.2 Cuadrados mágicos

Las siguientes escenas permiten trabajar las operaciones de números enteros en formato de pasatiempo. Encontramos cuadrados mágicos de 3x3 (figura 3a). Cada vez que pulsamos *inicio* el cuadrado mágico cambia. Una vez completado el cuadrado la escena indica si la actividad ha sido realizada correctamente (figura 3b).

Al pulsar *inicio* la escena nos presenta un cuadrado mágico diferente. También tenemos cuadrados mágicos 4x4. ¿Qué sucede si sumamos casilla a casilla cuadrados mágicos de número enteros? La escena de la figura 3c nos permite hacerlo.

El REA plantea una actividad de investigación a base de preguntas (figura 3d) ¿qué sucede si restamos, multiplicamos o dividimos casilla a casilla, cuadrados mágicos de números enteros?

Otra opción es realizar estas operaciones como en el caso de la figura 3c. Para ello podemos ir a dos unidades [Operaciones con números enteros I]() y [Operaciones con números enteros II](). (Unidades dedicadas a cuadrados mágicos y números enteros).

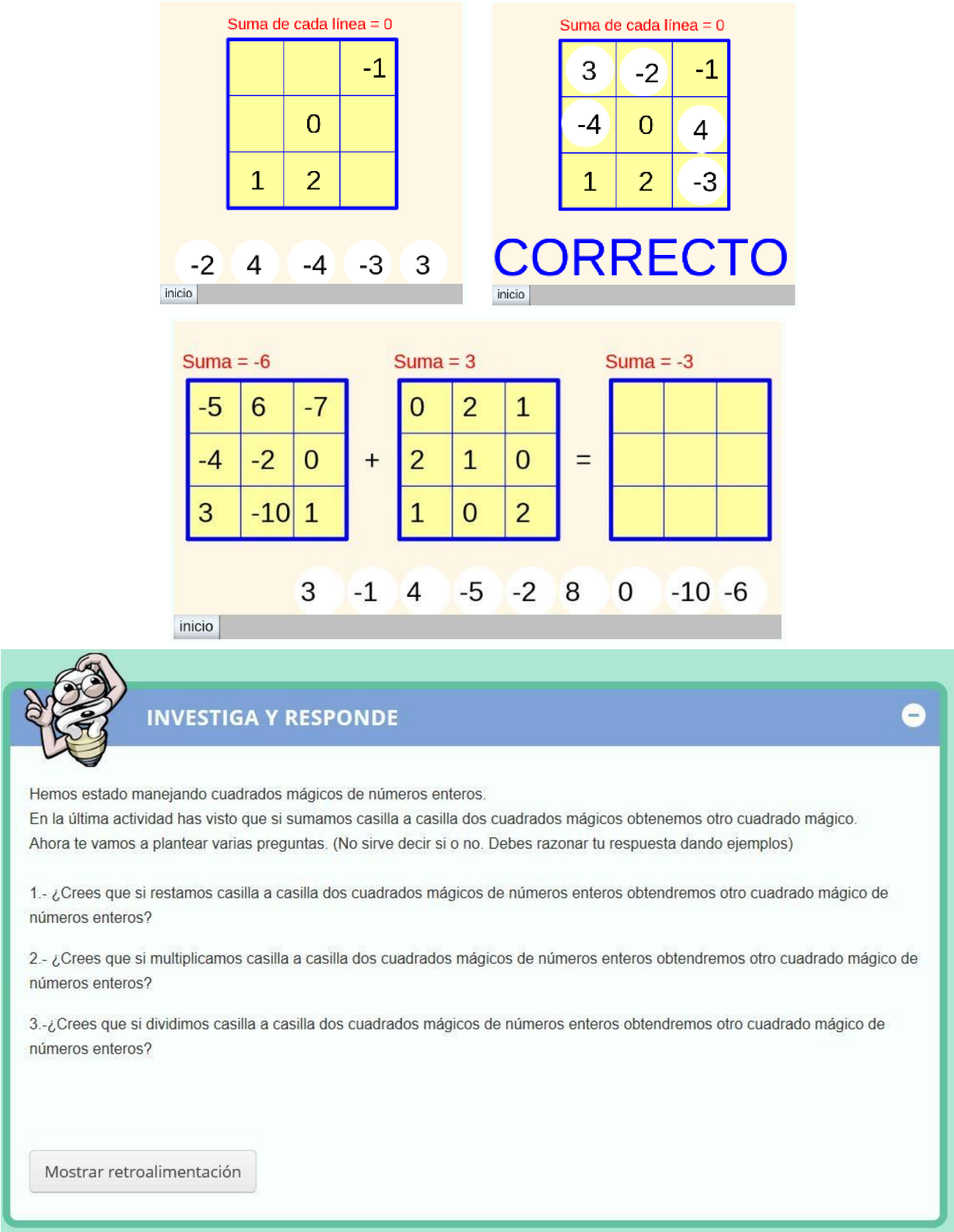


Figura 3. Cuadrados mágicos y actividad de investigación.

1.3 Estrellas de siete puntas

Se presenta otra escena (figura 4a) que permite trabajar la suma de números enteros en formato de pasatiempo. Debemos colocar los números enteros de la parte inferior en el lugar adecuado para que la suma de los tres círculos de un segmento sea cero. La escena también corrige el ejercicio (figura 4b). Al pulsar inicio obtenemos una estrella diferente.

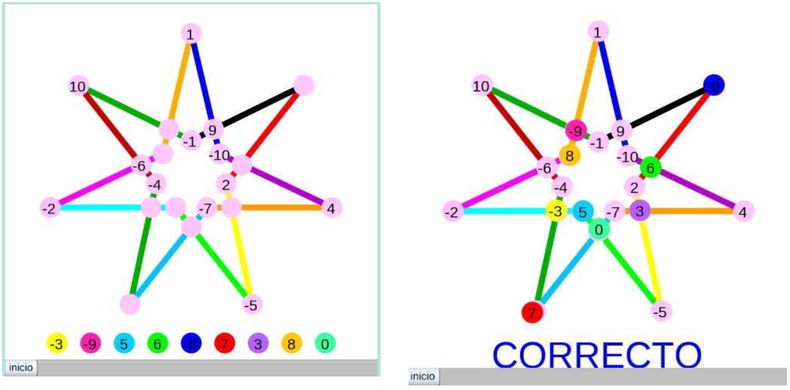


Figura 4. Escena de *Estrella de siete puntas*, y corrección.

1.4 ¿Es magia?

Tenemos una escena en la que un mago adivina un número que hemos pensado. El secreto está en las ecuaciones. Se plantea al alumno que repita el proceso del mago y también adivine. Es una forma de introducir las primeras reglas de resolución de las ecuaciones.

Figura 5. Escena de la sección *¿Es magia?*

1.5 Magia con polinomios

La escena de esta sección nos presenta el siguiente pasatiempo. Un alumno debe elegir una figura de entre las siguientes pero no debe decir cuál es. La escena le va presentando sucesivamente las imágenes de la figura 6, y el alumno debe decir cada vez si la figura elegida está entre las que se le muestran.

Finalmente, la escena le adivina la figura que había elegido. El secreto se desvela en la segunda escena. Debe calcular el valor numérico de un polinomio. Finalmente la tercera y última escena permite al alumno comprobar si es capaz de adivinar la figura elegida por otra persona.

1.6 Puzle de Pitágoras

Partiendo de la escena de la figura 7 se plantea trabajar el Teorema de Pitágoras con puzles.

Se dan instrucciones para que construyan la imagen de la figura usando cartulina de colores cuadriculada y comprueben el teorema para la terna 3, 4 y 5. Se puede realizar con otras ternas y utilizar otro tipo de descomposición de los cuadrados como por ejemplo las que pueden verse en las figuras.

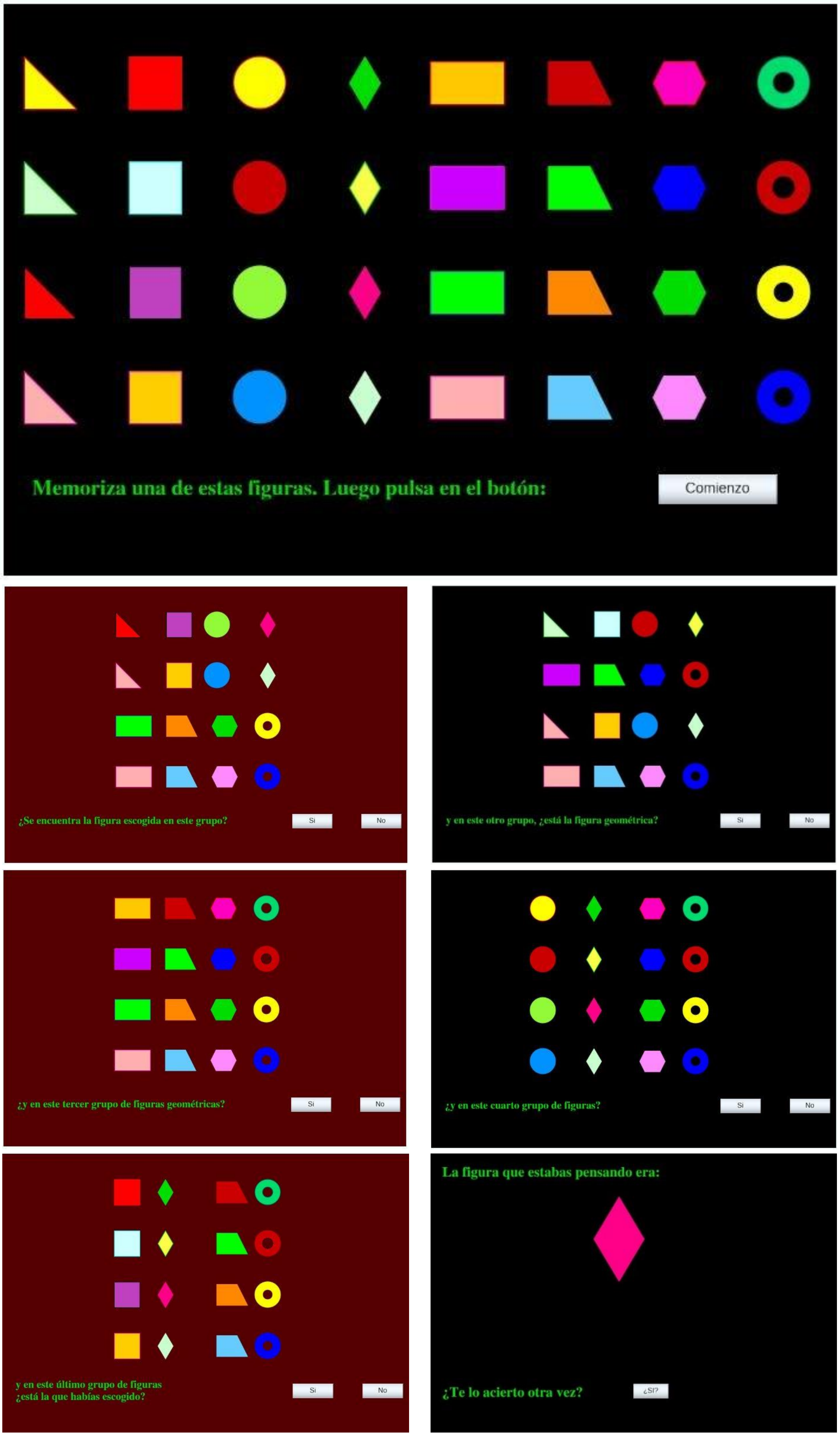


Figura 6. Escena de la sección *Magia con polinomios.*

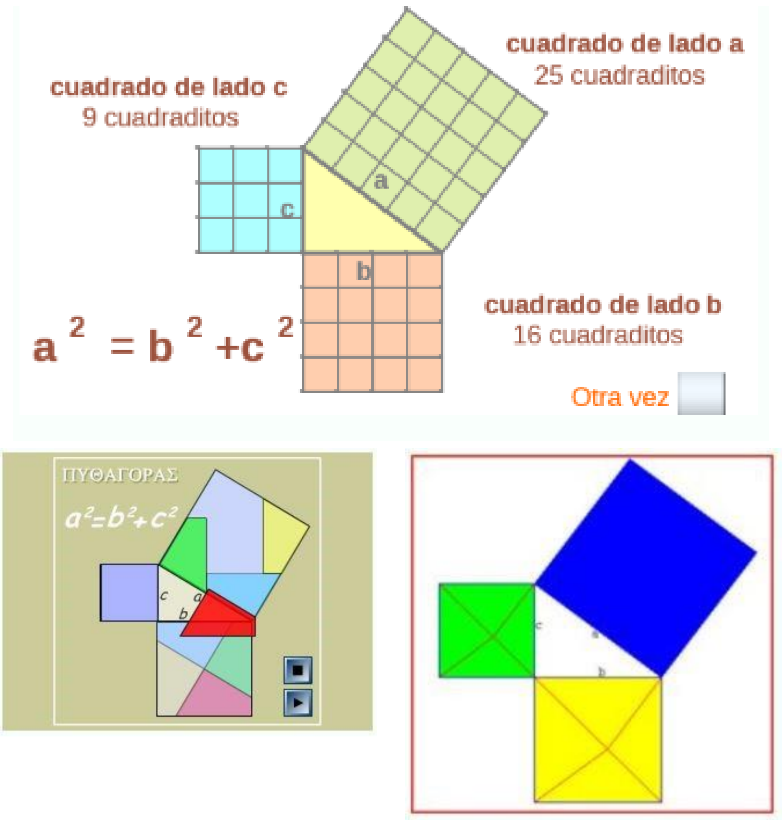


Figura 7. Escena de la sección *Puzle de Pitágoras.*

1.7 Tangram Chino

Es sobradamente conocido el rompecabezas más antiguo del mundo (figura 8a). El REA contiene una escena para usar el tangram en versión digital (figura 8b).

Se proponen distintas actividades además de la versión habitual del juego: la construcción de las piezas de un tangram, construir (sin usar todas las piezas) otras figuras y hallar el área de cada una de las piezas. A partir de un ejercicio de rellenar huecos (figura 9) el alumno descubre relaciones entre las dimensiones de las piezas del tangram. En el siguiente ejercicio debe, sin usar regla, y partiendo del lado del cuadrado de la figura 8a hallar los lados de cada una de las figuras, las alturas de los triángulos, del romboide, las diagonales del cuadrado, etc. usando Tales, Pitágoras, fórmulas de áreas y/o las relaciones vistas en el apartado anterior.

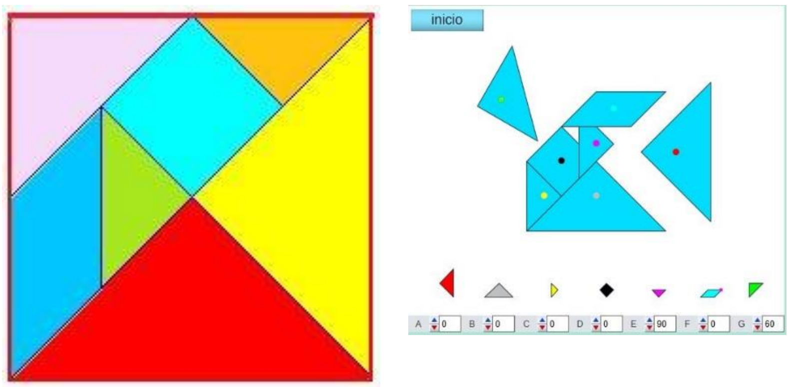


Figura 8. Escena de las secciones *Tangram Chino clásico y digital.*

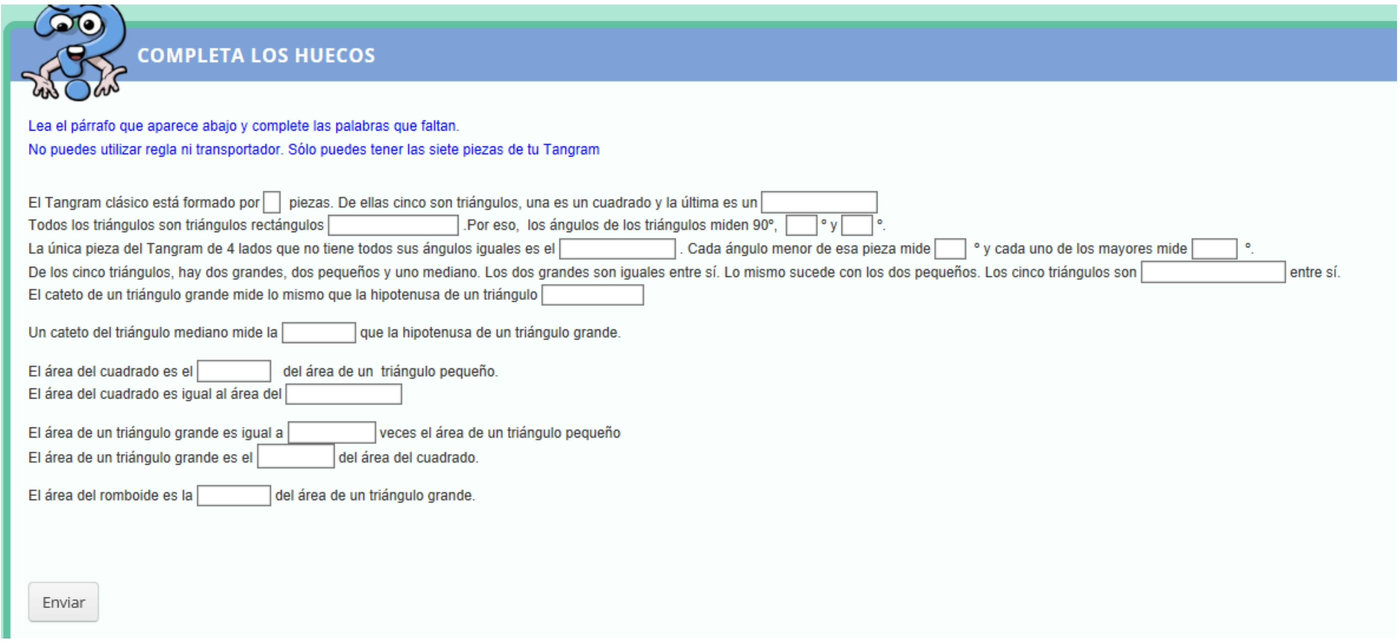


Figura 9. Ejercicio de rellenar huecos de la sección *Tangram clásico.*

1.8 ¿Jugamos al billar?

La escena de esta sección simula una mesa de billar (figura 10a). El punto de lanzamiento de la bola amarilla está situado en la banda izquierda. La modalidad de juego implementada por la escena es impactar en la bola roja después de dar en la banda superior. Se puede ver la trayectoria seguida por la bola amarilla después de un lanzamiento.

Evidentemente queremos ganar impactando en la bola roja y la pregunta es, ¿dónde debemos apuntar en la banda superior?, es decir, ¿cuál es el punto de contacto en la banda superior para conseguir nuestro objetivo? El alumno debe simular varias veces el juego y sacar alguna conclusión. Para ayudarle se le facilitan algunas imágenes de situaciones ganadoras. En la figura 10b podemos ver un ejemplo. La idea es hacer preguntas y ayudar para que descubran algunas propiedades geométricas que se dan en los lanzamientos que tienen éxito. La respuesta viene de la mano de la siguiente escena (figura 10c).

Guiados se dan cuenta de que el ángulo que forma la trayectoria de la bola con la banda superior y el ángulo de la trayectoria de salida con esa banda es el mismo. Con una trayectoria ganadora tenemos triángulos rectángulos semejantes y podemos aplicar el teorema de Tales. Así conocidos el punto de lanzamiento y la posición de la bola roja podemos, antes del lanzamiento, saber cuál es el punto de impacto en la banda superior que debemos conseguir (las operaciones podemos verlas en la parte superior de la figura 10c).

1.9 ¿Jugamos al billar? II

Esta escena (figura 11a) recrea una mesa de billar y tiene implementadas cuatro opciones de lanzamiento de la bola blanca para que impacte en la bola roja. Lo podemos ver en las figuras 11b, 11c, 11d y 11e. La pregunta es ¿qué trayectoria debe seguir en cada caso la bola blanca para impactar en la roja? La respuesta viene de la mano de la escena de la figura 11f, que nos desvela el misterio.

En el caso de tiro directo la respuesta es fácil debemos colocarnos de tal forma que el palo y las dos bolas estén alineadas. En el caso de tiro a banda superior debemos alinear el palo, la bola blanca con el punto simétrico P1 de la bola roja con respecto a la recta que hace de banda superior. En el caso de tiro a banda derecha alinearemos el palo, bola blanca con el punto simétrico P2 de la bola roja respecto a la recta que hace de banda derecha.

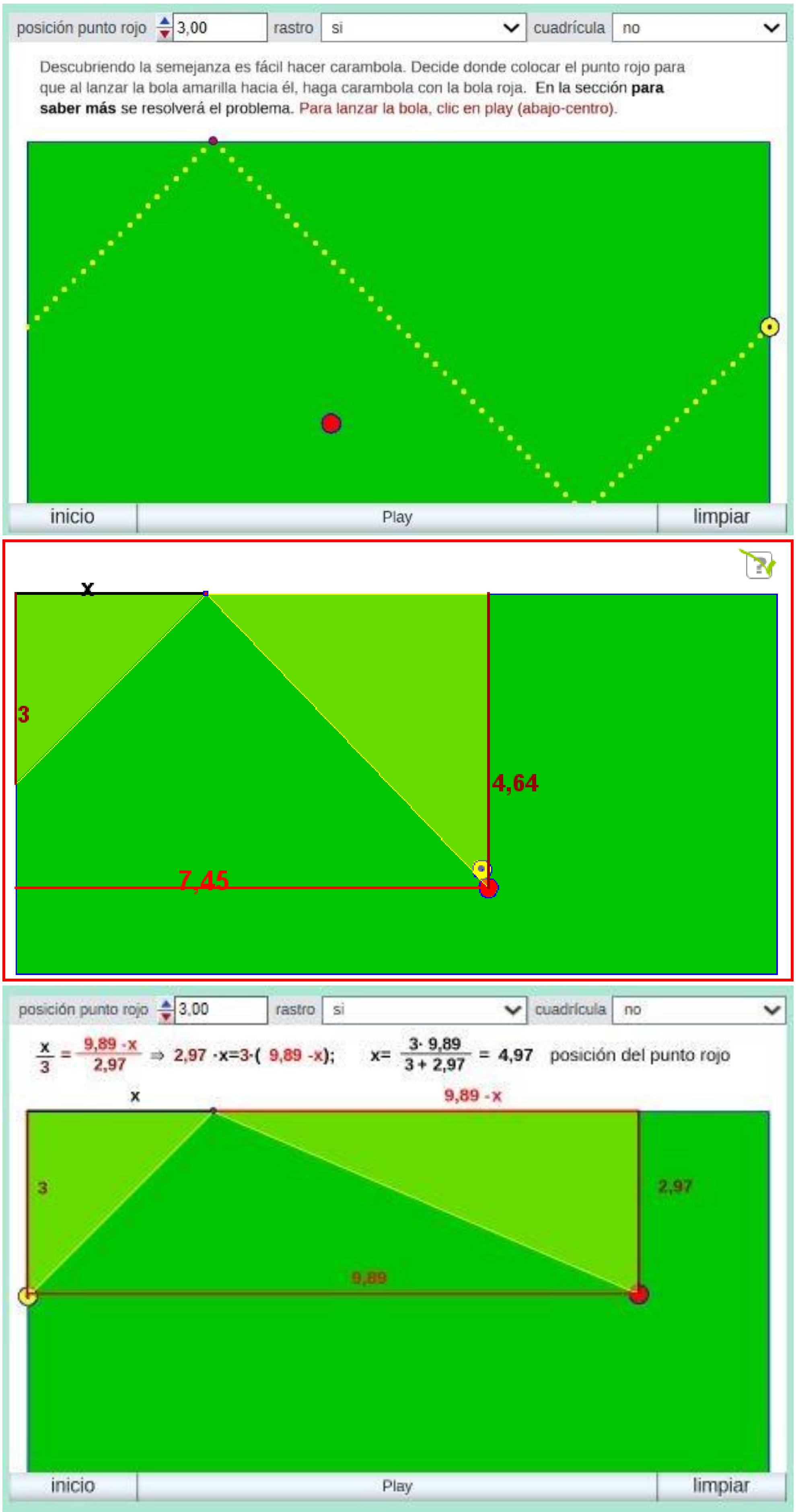


Figura 10. Imagen de la escena *Mesa de billar*: lanzamiento de bola y cálculo de posición de contacto.

Para el caso de tiro a dos bandas lo ilustramos en la figura 11f. En este caso debemos alinear palo, bola blanca con el punto simétrico P3 señalado en la imagen. En esta imagen también podemos ver los puntos simétricos P1 y P2 a los que aludíamos en el apartado anterior (son los otros puntos rosas).

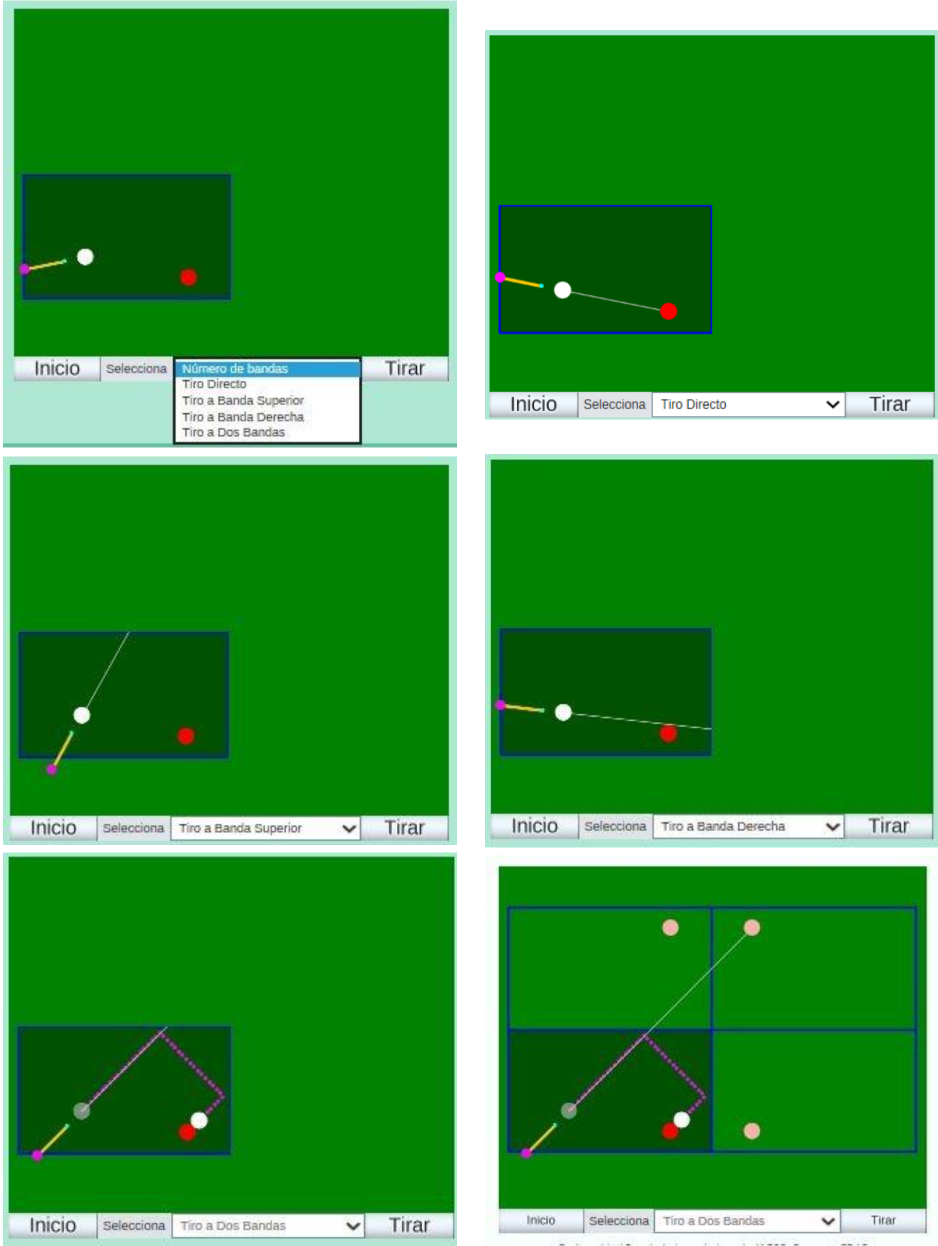


Figura 11. Imagen de la escena *Mesa de billar II*: tiro directo/a banda superior/banda derecha/a dos bandas.

1.10 ¿Qué apostamos?

En esta sección usaremos la escena de la figura 12, que simula una carrera.

Cada jugador tiene un dorsal, el resultado de la suma del lanzamiento de dos dados (el ordenador lanza los dados de forma aleatoria) nos indica qué caballo avanza en cada caso. El alumno debe apostar al caballo ganador. Si se repite la carrera varias veces se dan cuenta de que no es un juego justo.

A partir de ahí podemos trabajar la probabilidad de cada uno de los posibles resultados de la suma de los resultados de dos dados. EL REA plantea una pequeña actividad de reflexión y pide calcular las probabilidades en caso de multiplicar los resultados de los dados.

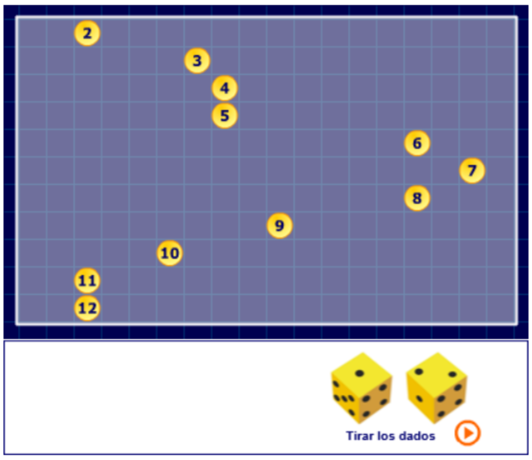


Figura 12. Imagen de la escena *Carrera de dados.*

1.11 El problema de Monty Hall

La escena recrea con el nombre de ABRIR Y GANAR el problema de Monty Hall. En primer lugar, el jugador debe elegir una puerta. Una vez elegida, debe abrir una de las puertas que no tienen el premio del coche y se le plantea la cuestión de si desea mantener la puerta inicial, o cambiar la primera elección (figura 13).

La escena permite simular el juego las veces que se desee y hace un recuento de las veces que se gana cambiando o manteniendo la primera elección realizada. Finalmente, se plantea la pregunta de si es conveniente conservar la primera elección, o cambiarla, en función de cual tenga mayor probabilidad. En el REA encontramos la solución y también se enlaza a la página de Wikipedia que trata del tema, y que incluso plantea una variante del juego con mayor grado de dificultad.

1.12 Contando manifestantes

Para el tema de estadística tenemos una escena que pregunta cómo se calcula el número de personas que han ido a una manifestación. En la imagen de la figura 14a cada punto representa una persona y el alumno debe hacer una estimación de los manifestantes. Pulsando *otra manifestación* aparece otra configuración de puntos (figura 14b). Finalmente, si pedimos ayuda al ordenador nos facilita un método de recuento (figura 14c).

EL REA plantea una actividad a realizar por parejas. Un estudiante va a asumir el rol de Gobierno y el otro el de organización convocante: Deben buscar un método que haga que obtengan resultados distintos para el nº de manifestantes en función de sus intereses. El objetivo de la actividad es hacer reflexionar al alumno sobre cómo se puede utilizar la Estadística de forma inadecuada.

1.13 Página del profesor, enlaces de interés y juegos de mesa

Se hace algunas consideraciones didácticas sobre el uso de estos materiales. Se incluye un cuadro resumen de los contenidos que se trabajan en cada una de las secciones, nivel, materiales necesarios para llevarlas al aula y si es posible llevarlas a cabo sin ordenador (comparando las ventajas y desventajas de uno u otro método).

Se facilitan algunas direcciones de páginas web con materiales relacionados con los juegos y las matemáticas. Algunos juegos pueden llevarse al aula sin necesidad de ordenador. En esta sección encontraremos ficheros que pueden descargarse y/o imprimirse con la versión en formato de juego de mesa de algunos de estos juegos.

Figura 13. Imagen de la escena *Abrir y ganar*: primera elección y momento de cambio.

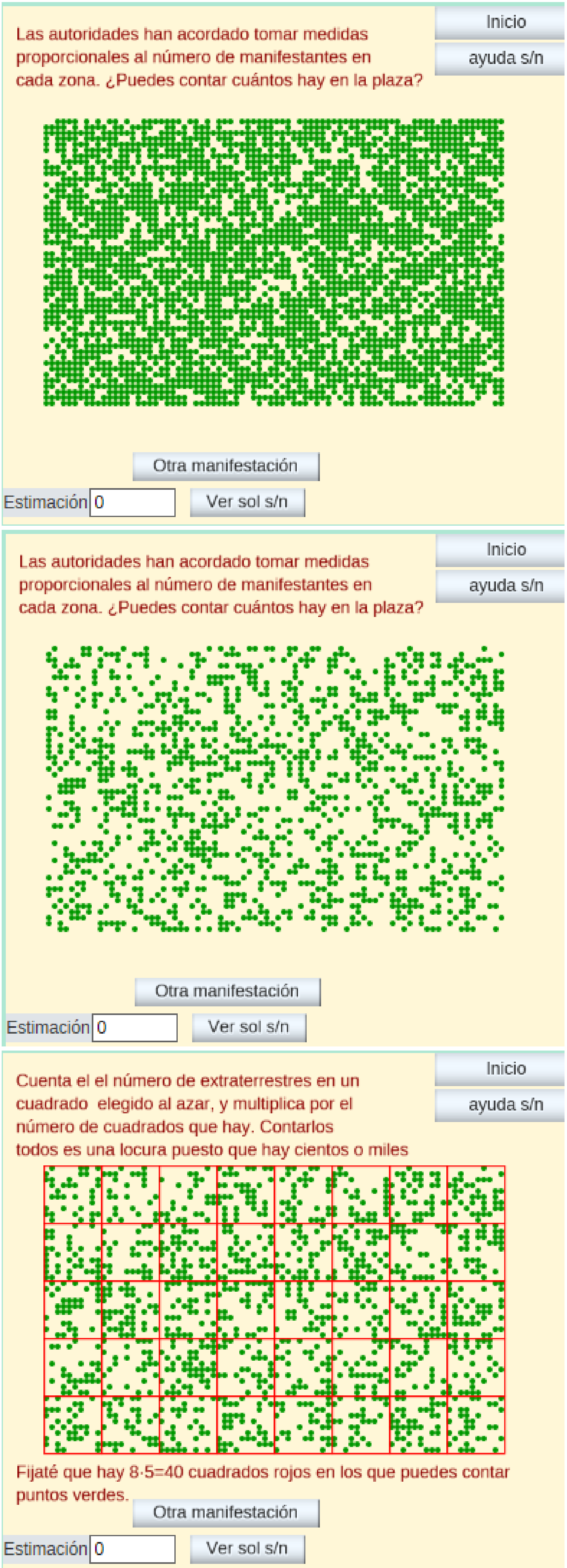


Figura 14. Imagen de la escena *Contando manifestantes*: dos manifestaciones y sugerencia de conteo.

Conclusiones

Debemos tratar de encontrar y llevar al aula materiales y recursos que estimulen al alumno. Las TICS, los pasatiempos, los juegos, los materiales manipulativos son buenas opciones que hacen que salgamos de la monotonía de la pizarra, el cuaderno y los ejercicios de lápiz y papel.

Este recurso pretende dar ideas y sugerencias de cómo llevar al aula estas escenas y juegos. No es un trabajo completo y cerrado. Es una primera vía de trabajo porque seguro que cada profesor conseguirá enfoques nuevos, plantear otro tipo de preguntas y utilizar estas escenas de otra forma.

En cada sección se indica, además de las reglas, el autor y la unidad de la que se extrajo la escena y si ha sido modificada o no. En realidad este REA presenta una pequeña selección de escenas del PORTAL RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES. Las personas interesadas encontrarán en él multitud de escenas para llevar al aula. Existen materiales muy variados y listos para ser utilizados que recorren el currículo de EP, ESO, Bachillerato y Universidad, incluso un sub-proyecto que permite crear juegos digitales propios.

Para hacer el REA se ha utilizado EXELEARNING (software libre) que permite incluir actividades interactivas tipo rellenar huecos, actividades tipo test, de verdadero o falso, etc., con autocorrección y/o retroalimentación. Además, permite incrustar páginas web, escenas de GeoGebra, applets de Java, imágenes, videos, etc. La última versión de este programa se puede encontrar en este enlace: descargar eXeLearning.

EL REA está publicado en el espacio PROCOMÚN del NTEF y va a ser publicado próximamente en el Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes): http://proyectodescartes.org/descartescms/.

Referencias

Información extraída de la página web: Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes).
http://proyectodescartes.org/descartescms/ [Consultado el 23/09/2017]

Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes). Página del sub-proyecto EDAD.
http://proyectodescartes.org/EDAD/mat_castellano_LOMCE.htm [Consultado el 23/09/2017]

Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes). Página del sub-proyecto UNIDADES DIDÁCTICAS.
http://proyectodescartes.org/uudd/index.htm# [Consultado el 23/09/2017]

Relación de autores de las escenas y del REA:

JUEGO DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES
Unidad: Múltiplos y divisores. Números primos.1º ESO. Autor: Eduardo Barbero Corral

CUADRADOS MÁGICOS
Unidad: Operaciones con enteros I. 1º ESO. Proyecto Descartes. Autor: Eduardo Barbero Corral
Ver también: http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/enteros2-JS/index.htm

PROBLEMA DE CUADRADOS MÁGICOS
Expresiones Algebraicas.1 ESO. Proyecto Edad. Autora: Montserrat Doménech Tomasa

ESTRELLAS DE SIETE PUNTAS
Unidad: Operaciones con enteros I. 1º ESO. Proyecto Descartes. Autor: Eduardo Barbero Corral

¿ES MAGIA?
Unidad: Ecuaciones y Sistemas.4º ESO (Opción B).Proyecto Edad. Autor: Miguel Angel Cabezón

MAGIA CON POLINOMIOS
Unidad: Polinomios.4ºESO. (Opción B) Proyecto Edad. Autora: Consolación Ruiz Gil

PUZZLE DE PITÁGORAS
Unidad: Figuras planas. Propiedades métricas. 3º ESO. Proyecto Edad .Autor José María Aina Martínez

TANGRAM CLÁSICO
Unidad Rompecabezas. Taller de Mat. 3º ESO. Proyecto Descartes. Autor de la escena: Salvador Calvo-Fernández

¿JUGAMOS AL BILLAR? I
Unidad: Semejanza. 4º ESO. (opción B). Proyecto Edad. Autora: Consolación Ruiz Gil

¿JUGAMOS AL BILLAR? II
Unidad: Geometría del plano.1º ESO. Proyecto Edad. Autor: José Luis Sacau

CARRERA DE CABALLOS
Unidad: Probabilidad. 3º ESO. Proyecto Edad. Autora: María José García Cebrián

ABRIR Y GANAR
Unidad: Probabilidad. 4º ESO (opción B). Proyecto Edad. Unidad: José Ireno Fernández Rubio

CONTANDO MANIFESTANTES
Unidad: Estadística. 3º ESO. Proyecto EDAD. Autor José Ireno Fernández Rubio

Was David Copperfield a son of the Industrial Revolution?[3]

Claudio Martínez Gil, Rocío Mancebo (IES Alhama, Corella)

Resumen

Se presenta un proyecto multidisciplinar para 1º de Bachillerato que involucra las asignaturas de Inglés, Ciencias Sociales, Economía y Matemáticas aplicadas a las CCSS. A partir de un texto adaptado de la novela de Charles Dickens titulada *David Copperfield* se trabajan conceptos lingüísticos e históricos. Se relaciona la situación de la novela con los indicadores demográficos y económicos de Gran Bretaña en el s. XIX. Con una hoja de cálculo preparada al efecto se estudia la correlación entre las diferentes variables.

Palabras clave

Revolución Industrial, Charles Dickens, Transición Demográfica, Correlación

Abstract

We present a multidisciplinary project for first grade middle education (16-17 year-olds) involving various school subjects, i.e., English, Social Science, Economy and Mathematics Applied to Social Science. We take as a starting point an adapted text from Charles Dickens entitled *David Copperfield*, from which some linguistic and historical concepts are worked on. The novels context is related to demographic and economic indicators in Great Britain in the 19th century. Students are expected to study the correlation amongst the different variables using a Google Spreadsheet designed for this project.

Palabras clave

Industrial Revolution, Demographic Transition, Correlation

Introducción

En este proyecto vamos a trabajar los conceptos de Revolución Industrial y coeficiente de correlación a través de un texto adaptado de la novela del escritor inglés Charles Dickens titulada David Copperfield, y empleando diferentes gráficos, artículos de Internet y vídeos.

El proyecto se divide en cinco bloques. En el primer bloque (A) se contextualiza el proyecto a través de actividades previas a la lectura del texto. El segundo bloque (B) consta de preguntas de comprensión sobre el texto. El tercer bloque (C) pretende afianzar lo trabajado en los bloques anteriores mediante la visualización de un vídeo y el responder a preguntas sobre el mismo. El cuarto bloque (D) estudia relaciones demográficas y económicas que ilustran aspectos básicos de la revolución industrial.

El último bloque (E) ha sido pensado para aquellos alumnos que deseen profundizar en lo aprendido en este proyecto. Se hace a través de la visualización de dos vídeos cortos, preguntas de reflexión sobre el trabajo infantil e investigación sobre la Función de Producción de Coob-Douglas.

---

[3] Martínez, C., Mancebo, R. (2018). Was David Copperfield a son of the industrial revolution? En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 37-41. Pamplona: UPNA.

1 Bloque A: Before you read

Estas son las preguntas y la estructura del Bloque A:

1. Look at the text (Chapter 5) without reading it and try to find who and when was it written. Find the title of the book it is taken from.
2. On the internet, try to find information about the context of the original work:
   a. When (specific historical period) it was written.
   b. Where it was written.
   c. The author's life and its influence on his work.
   d. Use these links to help you: https://en.wikipedia.org/wiki/Victorian_era; https://en.wikipedia.org/wiki/David_Copperfield; http://www.bbc.co.uk/history/historic_figures/dickens_charles.shtml.

Chapter 5. Running Away

> "At the age of ten, I began to work for Murdstone and Grindby. My job was to wash bottles, put labels on them and pack them in boxes. Three other boys also did this job in some old, dark buildings near the River Thames. I tried to work hard, but when I thought about the happy moments from my childhood, tears fell down my cheeks while I was washing the bottles.
>
> At the end of the first day, I was introduced to my landlord, Mr Micawber. My stepfather had arranged for me to rent a room from this gentleman, and a very unusual gentleman he was. When I arrived at his house, he introduced me to his wife and their family -a young boy, aged four, a young girl of three and twin babies. Mr and Mrs Micawber were not young, and judging by their house, they were not rich either. My first conversation with Mrs Micawber was about how unlucky they had been and how little money they had. As time went on, they became good friends, and I helped them whenever I could; however, I never had very much money myself." (Dickens, 1999, 26-27)

2 Bloque B: While you read

Estas son las preguntas y la estructura del Bloque B:

1. Guess who began to work at the age of ten. Justify your answer.
2. Which were David's tasks at the factory?
3. Was David happy with his job at Murdstone and Grindby? Find where in the text you can find the evidence for your answer.
4. What's a landlord in Spanish? Do you know the concept? Do you think it is common to have a landlord when you are ten years old? Why/ why not?
5. How many people formed the Micawbers?
6. In the text it is said that David helped the Micawbers whenever he could. What's the implication he makes in the very last sentence as for the nature of this help?

En las siguientes dos secciones relacionaremos el texto con la natalidad, la mortalidad, el índice de alfabetización, los sectores económicos, el PIB, etc., durante la Revolución Industrial en Inglaterra.

3 Bloque C: After you read I

Estas son las preguntas y la estructura del Bloque C:

Tienes que ver el vídeo del enlace y responder las preguntas que aparecen a continuación: https://youtu.be/sOb59AL-kGnc

1. ¿De qué año a qué año se produce la Revolución Industrial según el vídeo? ¿Dónde?
2. ¿Qué cambios tienen lugar en la agricultura y ganadería?
3. ¿Qué cambios tienen lugar en la industria?
4. ¿Qué cambios tienen lugar en el transporte?
5. A partir del video y de la siguiente dirección de internet, explica el proceso de la Transición Demográfica: transición demográfica.

4 Bloque D: After you read II

Estas son las preguntas y la estructura del Bloque D:

1. Look at the following graphs (figure 1) corresponding to the demography of England in the 19th century.
    a. What is the cause of the population increase?
    b. Use the spreadsheet which has been shared via Google Drive to find the correlation coefficient between the UK population and life expectancy. Which conclusions do you get to?
    c. Find the correlation coefficient between the mortality and the UK population. Which conclusions do you get to?
2. Figure 2 shows the distribution of the active population by sectors in the years 1840, 1850, 1870 and 1900. Can you tell which economic sector corresponds to each color? What has been the evolution of this distribution throughout the century? Can you indicate any cause?
3. Consider the following table 1. Can you represent graphically the evolution of the length of railway tracks in the UK along the 19th century and the evolution of nominal GDP?
4. Use the spreadsheet both to know if there is a relationship between the length of railway tracks and the nominal GDP and between the percentage of literate people and nominal GDP. Which correlation coefficient is greater? What does it mean?

Table 1. Gross Domestic Product (GDP), length of railway tracks and % of literate people

Año	PIB nominal (millones)	Ferrocarril (Km de vía)	Alfabetizados (%)
1830	479		58
1840	510	2411	59
1850	534	10662	62
1860	761	16798	65
1870	1079	24759	76
1900	1868	35204	85

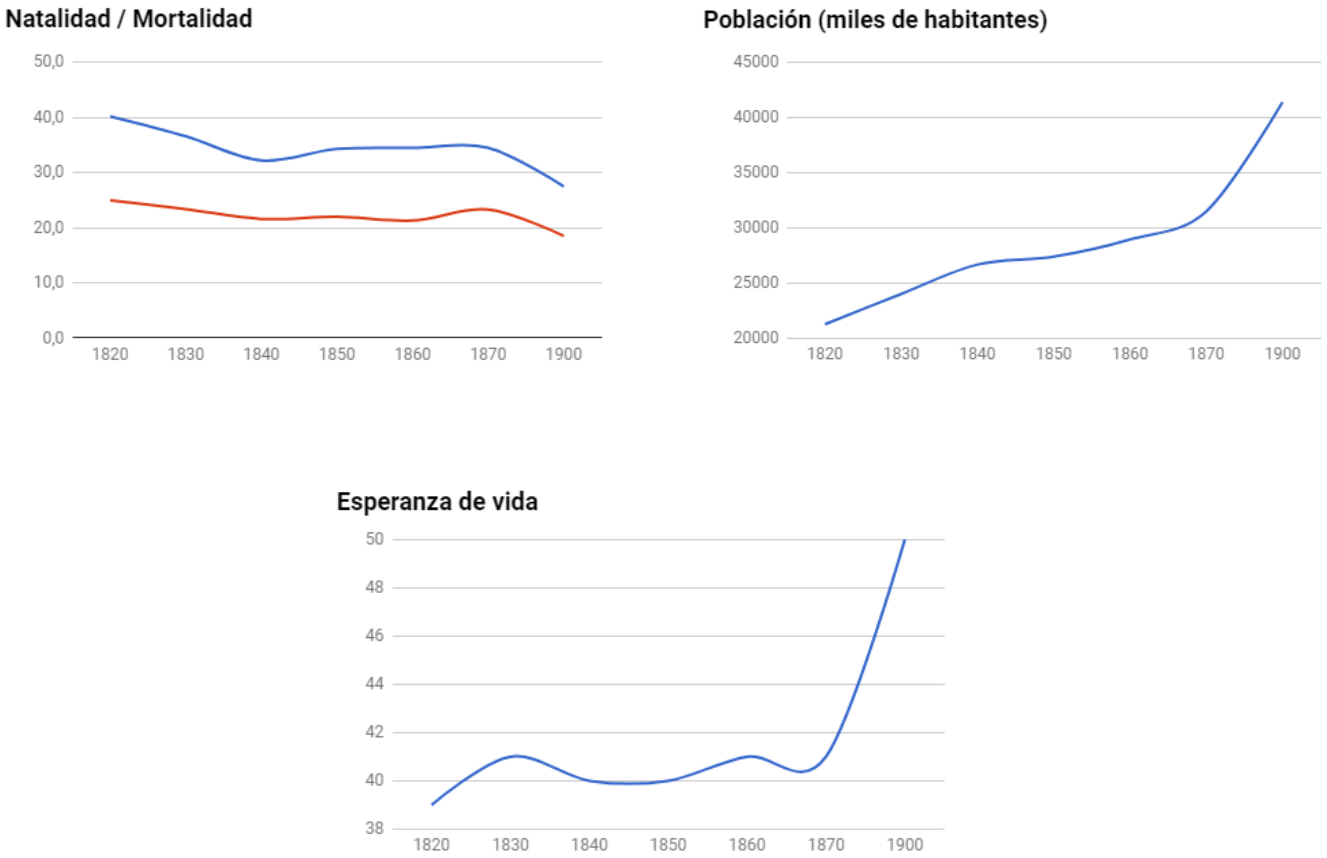


Figura 1. Natalidad y mortandad, población y esperanza de vida en GB, s. XIX.

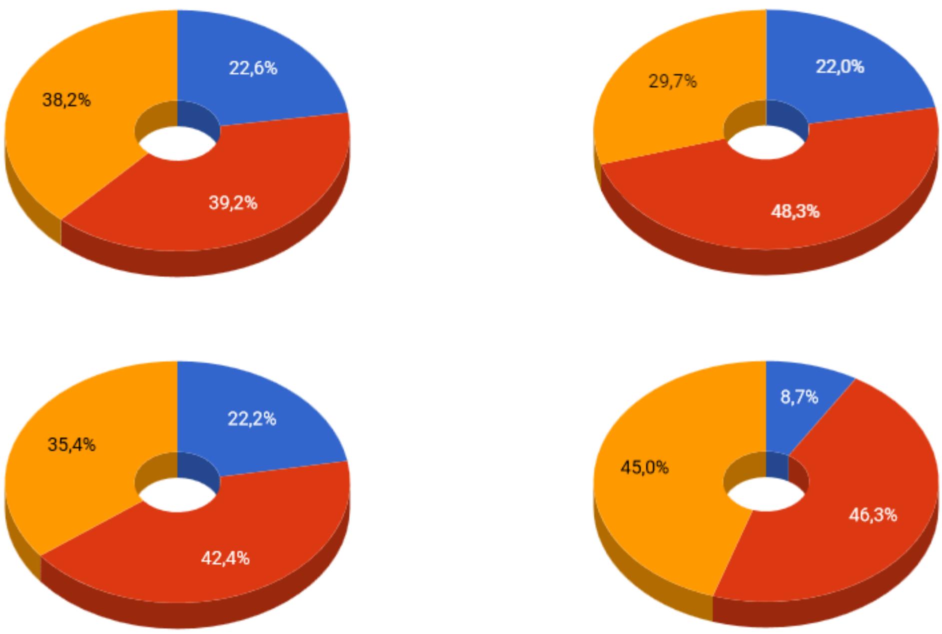


Figura 2. Distribución de la población por sectores.

5 Bloque E: Study in depth

Estas son las preguntas y la estructura del Bloque E:

1. Do you want to learn more? Watch these two short and interesting videos and make a list of the facts that strike you the most: https://youtu.be/ejc8oDOcN_o [This is a 2 minute video about child labour during the Industrial Revolution in England taken from a History channel]; https://youtu.be/SV3JO_RYIDE [This is 6 minutes long and consists of read-aloud fragments about child work during the Industrial Revolution].
2. What do you think about child labour? Do you agree with it? Why/ why not?
3. ¿Crees que se puede establecer una conexión directa entre la formación académica de una población y el PIB de su país? Justifica tu respuesta. Después busca información sobre la Función de producción de Coob-Douglas y completa tu respuesta inicial.

Referencias

Dickens, C. (1999). *David Copperfield*, pp. 26-27. 1º Bachillerato. Cyprus: Burlington Books.

Mitchell, B. R. (1998). *International Historical Statistics: Europe 1750-1993*. London-New York: Macmillan-Stockton.

Mitchell, B.R., Flora, P., Pfenning, W. (1998). *State, economy, and society in Western Europe: 1815-1975: a data handbook in two volumes*.

Lindert, P. (2007). Student Enrollment Rates in Primary Schools, Selected Countries, 1830-1930.
[Recuperable en (04/11/2017): http://www.econ.ucdavis.edu/faculty/fzlinder/]

Autoestima, autonomía y matemáticas. Una propuesta basada en el juego[4]

Inmaculada Lizasoain Iriso (Depto. de Matemáticas UPNA)
José Víctor Orón Semper (ICS – UN, Director del programa UpToYou)

Resumen

Piaget y Erikson definieron la autoestima y la autonomía basándose en lo que significa el juego. Para el niño, el valor del juego está únicamente en lo que supone en sí y no por algo exterior al mismo juego. Por tanto, el valor está en el disfrute de la interacción personal. En este contexto, el niño alcanza la autoestima cuando descubre que su persona es significativa para alguien, en especial para el educador. Por otro lado, el juego nos enseña el valor de las normas, aceptadas por todos, como forma de promover la autonomía, entendida no como independencia sino como agencia encaminada a la construcción social. Presentamos una actividad de matemáticas para cuarto curso de primaria sobre áreas y perímetros que responde a una serie de características relevantes para promover la autoestima y la autonomía al mismo tiempo que satisface las necesidades curriculares.

Palabras clave

Educación emocional, matemáticas, primaria, autoestima, autonomía.

Introducción

Es habitual entender la educación emocional en la escuela como un tema transversal, que debería ser trabajado únicamente en las horas de tutoría o en las tareas de orientación y asesoramiento del alumno. Sin embargo, el Programa de Educación Emocional UpToYou (http://www.uptoyoueducacion.com/) propone un nuevo modelo educativo que tiene como objetivo lograr el crecimiento global del alumno mediante la mejora de las relaciones interpersonales entre el educador y el educando. Cabe esperar que un planteamiento tan ambicioso abarque forzosamente las actividades curriculares y, en particular, las matemáticas.

Nuestro reto en este trabajo es diseñar una actividad curricular donde se tenga en cuenta la educación emocional, partiendo de una premisa establecida en el programa UpToYou: "La mejor forma de promover el aprendizaje es logrando un ambiente de Alerta Relajada" donde la alerta queda determinada por la tarea, mientras que la relajación viene dada por la calidad y la seguridad de la relación educador-educando. La forma de conseguir este ambiente relajado viene inspirada por la manera en que el niño entiende el juego, según Piaget (1965) y Erikson (1959). Estos autores postularon que lo que el niño busca en el juego es simplemente el disfrute de la relación interpersonal ya que, cuando el juego termina, no queda nada como producto final (Piaget, Lorenz y Erikson, 1982).

Lo valioso es el encuentro que se ha dado entre las personas. En este ambiente de juego, el niño crece en autoestima porque encuentra que su persona es significativa para el otro y crece también en autonomía porque comprueba que su autoría, lo que él hace respetando unas normas que ayudan al encuentro interpersonal, sirve para la construcción social.

[4] Lizasoain, I., Orón, J.V. (2018). Autoestima, autonomía y matemáticas. Una propuesta basada en el juego. En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 43-46. Pamplona: UPNA.

Llevando esta idea al terreno educativo, diseñamos una tarea matemática, pensada para ser llevada a cabo en cuarto curso de educación primaria, en la que se le plantea resolver un problema matemático que supone en principio cierta dificultad:

> "Fijada el área de una determinada región plana, que se medirá utilizando el gomet cuadrado como unidad, se trata de encontrar la forma de colocar los gomets para que el perímetro sea el menor posible."

1 Diseño de la actividad

El reto matemático que hemos planteado se concretará en que los alumnos diseñen, trabajando en grupos, los espacios que ocuparán los diferentes animales de una granja, para lo cual se proporcionará a cada grupo: una cartulina A3; 100 gomets cuadrados de 2 cm x 2 cm, con los que se formarán sobre la cartulina los recintos destinados a los animales, y 30 gomets de un color distinto al anterior, cortados en tiras rectangulares, de 0,66 cm x 2 cm, que se utilizarán para vallar los recintos mencionados anteriormente.

Plantearemos a los alumnos la actividad de manera progresiva, dejando claro en cada paso qué decisión tienen que tomar o qué reto matemático se les propone resolver.

En primer lugar, les diremos que van a diseñar su propia granja, para lo cual deben empezar decidiendo qué animales pondrán en ella. Podemos darles alguna norma, por ejemplo, que no puede haber más de tres tipos de animales distintos y que tienen que decidir cuántos animales pondrían de cada tipo utilizando un criterio determinado: que fueran ellos mismos los que tuvieran que cuidar de ellos.

Una vez que cada grupo haya tomado las decisiones requeridas, les daremos los 100 gomets cuadrados, explicándoles que tienen que repartirlos entre los tres espacios que ocuparán los distintos animales que hayan elegido para su granja. Los niños tendrán que estudiar qué animales necesitarán más espacio y cuáles menos y consensuar la forma de repartir el espacio con el resto de los miembros del grupo. Para ello, además de realizar las operaciones matemáticas que sean necesarias, tendrán que comunicarse con sus compañeros y explicarles su forma de razonar.

Cuando hayan decidido la cantidad de gomets que dedicarán a cada tipo de animal, lo que apuntarán en el Anexo I proporcionado por el profesor, se les planteará un nuevo reto matemático:

> ¿Cómo colocaríais los gomets en cada uno de los recintos si tuvierais que utilizar la mínima cantidad de valla posible?

Se les explicará que la valla se va a modelar con las tiras de gomets de que dispone cada grupo, de un color distinto al de los gomets utilizados para llenar los recintos de los animales. La labor del profesor es aquí la de animar a los niños a que coloquen los gomets cuadrados de distintas formas, sin pegarlos en la cartulina, y a que calculen el número de palitos de valla que necesitarían en cada una de estas colocaciones. De esta manera, comprobarán experimentalmente que recintos con una misma área pueden tener diferente perímetro, además de aprender a distinguir cuándo necesitan calcular el área de una región (contar los gomets cuadrados) o hallar un perímetro (contar los palitos de valla que rodean la región).

En esta tarea, es de esperar que los alumnos cometan errores. Al colocar los palitos junto a los gomets cuadrados para formar el vallado, no es fácil que tengan claro cuántos hacen falta en cada caso. El alumno está confrontando la realidad con el cálculo matemático y puede ser que, en un principio, no sepa muy bien cómo hacerlo. La forma en que el profesor interactúa con él, indagando la manera en que el alumno organiza su pensamiento, será fundamental para fomentar la autoestima del alumno, que ve que su pensamiento es importante para el profesor.

Por otro lado, de cara a desarrollar la autonomía de los estudiantes, es importante que estos sean conscientes de que el profesor va diseñando la tarea matemática partiendo de lo que los alumnos aportan: el número de animales que han decidido poner sirve de base para calcular el espacio que ocuparán en la granja; el espacio destinado a cada tipo de animal se utiliza en el siguiente paso para calcular la valla que se necesitará y así sucesivamente. Esto animará a los estudiantes a ser agentes, autores de la tarea, y fomentará así su autonomía.

Una forma de dar continuidad a la tarea sería permitiendo a los niños pasar a la clase de al lado a mostrar su granja a sus compañeros. Supongamos que estos hubieran diseñado, por ejemplo, un parque o algún otro espacio similar. El intercambio de experiencias sería una experiencia enriquecedora para todos ellos.

Obviamente, no será esta la forma en que le presentemos el reto al alumno, sino que buscaremos un contexto que le resulte cercano y, por supuesto, una forma de introducir progresivamente la actividad que deje espacios de decisión al alumno para que este pueda enfrentarse a la tarea con espontaneidad.

Conclusiones y cuestiones abiertas

Después de haber diseñado esta actividad, podemos afirmar que es posible tener en cuenta la educación emocional a la hora de trabajar actividades curriculares de matemáticas. Además, constatamos que esta integración no tiene que suponer necesariamente una rebaja en la dificultad de la tarea. Al contrario, el hecho de que el diseño de la actividad deje espacios de libertad al alumno propicia que este realice gran cantidad de ejercicios de experimentación y de cálculo de forma espontánea, lo que da significatividad y profundidad al aprendizaje. La puesta en práctica de esta actividad será el objetivo de nuestra investigación a corto plazo.

Referencias

J. Piaget, (1965). *The rules of the game. The moral judgement of the child* (pp. 1-104). Glencoe (Illinois): The free Press.

J. Piaget, K. Lorenz y Erik H. Erikson (1982). *Juego y desarrollo*. Barcelona: Crítica. Grupo editorial Grijalbo.

E. H. Erikson (1959). *Identity and the cycle of life: selected papers*. Psychological issues, 1.1 (pp. 5-165). New York: International Universities Press.

Anexo I

TIPOS DE ANIMALES	CUÁNTOS ANIMALES DE CADA TIPO	CUÁNTOS CUADRADOS PARA ELLOS	CÓMO SE COLOCAN LOS CUADRADOS	CUÁNTA VALLA HACE FALTA

Evaluación de las necesidades matemáticas de los estudiantes del grado de economía de la FCCEE de la UPNA[5]

Ana Munárriz Iriarte, María Jesús Campión Arrastia (UPNA)

Resumen

Debido a la preocupación por las diferencias en el nivel de matemáticas de los estudiantes del grado de Economía de la UPNA se ha realizado un estudio para localizar y subsanar estas carencias. En él, se evalúan los contenidos matemáticos de la etapa preuniversitaria, los de las asignaturas de matemáticas del grado y las necesidades matemáticas del resto de asignaturas impartidas en Economía, unido a entrevistas con profesores y estudiantes. Los resultados muestran que la brecha existente es debida a la diferencia entre los currículos de Matemáticas del Bachiller de Ciencias Sociales y el de Ciencias, los dos principales accesos. Además, parte de las herramientas utilizadas en el grado no quedan cubiertas por la actual oferta de Matemáticas. En conclusión, es indispensable que las Matemáticas del Bachillerato de Ciencias estén a disposición del de Ciencias Sociales y se necesita una asignatura adicional de Matemáticas en el grado de Economía.

Palabras clave

Matemáticas, Economía, UPNA, herramientas, contenidos.

Introducción

Las Matemáticas son una herramienta indispensable para la explicación y transcripción de los fenómenos empíricos que se estudian en Economía. Es por ello que resulta de vital importancia conocer cuáles son las necesidades de los alumnos del Grado de Economía en esta materia y así poder buscar vías de implementación de la misma con la finalidad de dotarles de la mejor formación posible.

En este texto se presenta un estudio sobre el conocimiento matemático de los estudiantes del Grado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Pública de Navarra.

En las cuatro etapas que se desarrollan a continuación, se lleva a cabo una comparación de los perfiles de bachiller con el que los alumnos acceden a Economía, se estudian las necesidades matemáticas para la superación de las diversas asignaturas del grado, los contenidos de las asignaturas matemáticas y se realizan entrevistas a estudiantes y profesores.

Con todo ello se pretende determinar cuál es el nivel de Matemáticas con el que los estudiantes llegan a la universidad desde las diferentes vías de acceso y qué contenidos se necesitan a lo largo del grado para configurar cuál es la oferta matemática que debe aportarles la universidad.

1 Estudio de los currículos de la Educación Preuniversitaria: Bachiller

En esta primera etapa se han estudiado los contenidos de las diferentes modalidades de Bachiller que se pueden cursar actualmente. Los currículos evaluados han sido los de la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa) debido a que no presenta excesivas diferencias con respecto a la LOE (Ley Orgánica de Educación) que

[5] Munarriz, M., Campión, M.J. (2018). Evaluación de las necesidades matemáticas de los estudiantes del grado de economía de la FCCEE de la UPNA. En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 45-54. Pamplona: UPNA.

estaba en vigor hasta hace dos cursos académicos. La información sobre esta parte del estudio ha sido solicitada al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, así como al Departamento de Educación del Gobierno de Navarra. Todo ello ha permitido la configuración de una imagen de las condiciones en las que los estudiantes llegan a la universidad en función del tipo de Bachiller que escogen.

Tanto el Bachiller de Ciencias como el de Ciencias Sociales presentan una asignatura de Matemáticas obligatoria en sus currículos académicos. Sin embargo, no se trata de la misma asignatura en ambos casos sino que difieren en la orientación.

El Bachiller de Ciencias presenta una estructura de 5 bloques: un primer bloque transversal común, números y álgebra, análisis, geometría y estadística y probabilidad mientras que el Bachiller de Ciencias Sociales presenta tan solo 4; el primer bloque común, números y álgebra, análisis y estadística y probabilidad. Además, el peso de cada uno de estos bloques tampoco se da en las mismas proporciones en ambas asignaturas.

Tras el repaso de ambos currículos, se pueden determinar con qué contenidos entran todos los estudiantes a la universidad.

En el campo del Análisis, los estudiantes han trabajado con diferentes tipos de funciones, han practicado el cálculo de límites, han estudiado la continuidad de una función y han procedido al cálculo de derivadas e integrales.

En el ámbito de la Estadística y la Probabilidad tienen unas nociones de estadística descriptiva, conocen los principales valores que caracterizan una muestra, han trabajado con diferentes distribuciones de probabilidad y han utilizado la regla de Laplace o el Teorema de Bayes.

En el bloque de Números y Álgebra, ambos bachilleres presentan inecuaciones y ecuaciones lineales y no lineales. Además, ambos tienen una parte común de matrices y representación matricial de sistemas, el método Gauss y las propiedades y operaciones vinculadas.

Es importante destacar que el hecho de que ambos bachilleres presenten en parte la misma materia no determina que el temario se imparta de la misma forma. Al tratarse de orientaciones distintas el enfoque desde el que se explica el contenido es diferente y el nivel de exigencia y los criterios de evaluación no están basados en los mismos estándares.

Del mismo modo en que coinciden en varios aspectos, ambas asignaturas presentan grandes divergencias:

La primera distinción entre ambos currículos es que el Bachiller de Ciencias Sociales carece de la parte de geometría que posee el de Ciencias. La parte liberada es utilizada por las Ciencias Sociales para profundizar en temas de inferencia estadística y probabilidad.

En cuanto al bloque de Números y Álgebra, las principales diferencias corresponden a los números complejos y las sucesiones numéricas que aparecen en Ciencias pero no en Sociales. En su lugar aparecen operaciones con capitales financieros, intereses, capitalización y amortización, temas vinculados con la economía y la empresa. En el segundo curso, resalta la aparición de la programación lineal bidimensional en el currículo de Ciencias sociales y el de los determinantes en el de Ciencias como principal diferencia entre ambos bloques.

El bloque de Análisis es el que presenta la diferencia más importante. Mientras que en Ciencias se introducen teoremas y se profundizan más conceptos fundamentales relacionados con la derivación y la integración, en Ciencias Sociales se hace hincapié en la aplicación práctica de los problemas de optimización.

En conclusión, el bachiller de Ciencias tiene un enfoque más conceptual que permite al estudiante desarrollar una mayor capacidad de abstracción y entender mejor los fundamentos teóricos de la materia. En cambio, la asignatura de matemáticas en el bachiller de Ciencias Sociales tiene un carácter más aplicado, haciendo especial énfasis en la resolución de problemas prácticos.

2 Análisis matemático de las asignaturas del grado en economía

En esta segunda etapa, se ha realizado un estudio sobre las necesidades matemáticas de las asignaturas del grado de Economía, determinando en cada caso cuáles son las herramientas que necesita controlar el estudiante para comprender los conceptos y realidades que en ellas se describen. El material utilizado ha sido la Memoria de la ANECA correspondiente al grado de Economía así como la bibliografía que aparece en las guías docentes de las asignaturas que se encuentran en la página web a disposición de cualquier estudiante. Esto ha permitido determinar los conocimientos matemáticos que se necesitan para superar el grado de manera satisfactoria.

Los contenidos matemáticos necesarios en las asignaturas de Economía son los siguientes:

2.1 Introducción a la economía

La asignatura de Introducción a la economía pertenece al primer semestre del grado. Al tratarse de una asignatura de carácter introductorio, el nivel de matemáticas precisado para asimilar de forma correcta lo impartido en ella es bajo, siendo suficientes los conocimientos aportados en la asignatura de matemáticas tanto del Bachiller de Ciencias Sociales como del de Ciencias. Las principales herramientas matemáticas utilizadas son las funciones, en especial las lineales, que representan la oferta y demanda de una economía. A partir de la intersección de estas funciones se calculan los equilibrios resultantes, por lo que es necesario obtener los puntos de corte entre ambas, así como las áreas de las figuras planas que estos delimitan, en su mayor parte triángulos y rectángulos. Es de especial interés la diferenciación entre movimientos sobre la curva y movimientos de la curva. Por último se utilizan las matrices de pagos en teoría de juegos para calcular los equilibrios de Nash y también se hace uso de la probabilidad básica.

2.2 Economía de la Empresa

Esta asignatura pretende dotar al estudiante de los principales conceptos asociados a la organización de la empresa así como de aquellos mecanismos para la mejora de la eficiencia empresarial. Aunque su naturaleza es conceptual, el curso utiliza los modelos propuestos por el análisis económico para la comprensión de las diversas realidades que se dan dentro de una empresa. En este contexto, hace uso de las loterías, valores esperados y varianzas de las diferentes variables aleatorias y de funciones de tipo Cobb-Douglas, racionales e incluso logarítmicas debido a su concavidad. Además, resulta importante el uso de la optimización con una o varias restricciones debido a que la mayor parte de los análisis se basan en la búsqueda de la máxima utilidad o el menor esfuerzo. De este modo, el estudiante debe saber realizar derivadas parciales del tipo de funciones anteriormente citadas, determinar la monotonía de una función así como obtener máximos y mínimos.

2.3 Operaciones Financieras

La asignatura de operaciones financieras tiene como objetivo que el estudiante sea capaz de analizar los conceptos financieros básicos. El cálculo dista de ser mucho más complejo que el utilizado en Bachiller, no obstante, requiere cierto manejo de los números por parte del estudiante. Este debe ser capaz de controlar las diferencias entre el comportamiento de una función lineal y una exponencial tanto de manera gráfica como analítica, el uso de exponentes negativos o racionales en el caso de la capitalización y el descuento o ser capaz de comprender las fórmulas genéricas de las operaciones con letras e incógnitas para así poder proceder a su cálculo. Además, se incluyen en la asignatura la demostración o el método de obtención de varias fórmulas que incluyen la suma de progresiones aritméticas y geométricas. Estas resultan especialmente costosas para el estudiante debido a que no está familiarizado con este tipo de procedimientos.

2.4 Microeconomía I y II

La microeconomía busca representar problemas económicos mediante modelos matemáticos abstractos para entender las relaciones fundamentales de la realidad económica y, por ello, precisa de unas herramientas matemáticas básicas notables: Para relacionar magnitudes se utilizan las funciones. Este campo se amplía con respecto a Bachiller con el uso de funciones de varias variables. Es de vital importancia la representación gráfica de estas funciones, en especial las de varias variables que aparecen como nuevo concepto.

Otra herramienta muy importante en la microeconomía son las derivadas que sirven para denotar el término “marginal”. Al tener funciones de una y de varias variables, se añade el uso de derivadas parciales. La importancia de este concepto recae no solo en el cálculo sino en su correspondiente interpretación gráfica y económica. También encontramos el concepto de elasticidad, muy utilizado en economía.

Para maximizar la producción, la utilidad o minimizar la función de costes se utilizan métodos de optimización simple o el método de Lagrange. Destaca el cálculo de áreas sencillas o bien mediante la resolución de integrales definidas o bien mediante las fórmulas de las áreas del triángulo y del rectángulo para los excedentes del productor y del consumidor.

En cuanto a los tipos de funciones utilizadas, vuelven a tener especial peso las Cobb-Douglas, sin embargo, encontramos nuevas tecnologías que dan lugar a otras funciones entre las que destacan las de máximo y mínimo.

2.5 Estadística I

La asignatura de Estadística I contiene los conceptos estadísticos más básicos para el análisis de datos, es decir, estudia la parte descriptiva. Estudia las medidas de posición central y no central, las medidas de dispersión y forma, tipificación, índices, series temporales e introducción a la probabilidad. La mayor parte de contenidos forman parte del temario de Bachiller de Ciencias Sociales y algunos incluso en el de Ciencias, por lo que no son de especialmente complicados para el estudiante.

2.6 Economía Aplicada I y II

Tanto Economía Aplicada I como Economía Aplicada II presentan una parte de contabilidad nacional que se encarga esencialmente del cálculo de macro-magnitudes agregadas. Resulta de especial importancia el conocimiento y manejo por parte del estudiante de los números índice, relaciones y tasas de variación, tanto desde el cálculo como de su interpretación, incidiendo en el hecho de que no son simétricas sino que dependen del valor de referencia.

Además, conforme se avanza en la asignatura aparecen los índices encadenados así como otros conceptos que presentan sumatorios en sus fórmulas. Los estudiantes no están familiarizados con su uso por lo que les resulta costosa su lectura e interpretación. En esta asignatura es importante la diferenciación entre términos absolutos y términos relativos.

En la segunda parte (impartida en segundo curso) se hace uso de matrices y, pese a que no se usa nada más complejo que lo cursado en las asignaturas de Matemáticas del grado, sería positivo que el estudiante entendiese la interpretación de un producto o una inversa.

2.7 Macroeconomía I y II

La asignatura de Macroeconomía I y II no presenta un contenido matemático especialmente complicado. Los ejercicios más complejos son aquellos en los que hay que calcular equilibrios entre las funciones de oferta y demanda de los diferentes mercados o calcular el equilibrio IS-LM. Además, resulta de especial interés la diferenciación entre movimientos sobre la curva y movimientos de la curva. Al igual que en introducción y en Microeconomía, utiliza las derivadas para denotar el tipo marginal.

2.8 Estadística II

En la asignatura de Estadística II se estudia la inferencia estadística. Entre sus contenidos principales se encuentran las distribuciones de probabilidad (discretas y continuas), el muestreo, las estimaciones y los contrastes de hipótesis. La matemática utilizada no es compleja si bien el nivel de abstracción necesario para entender correctamente lo que se explica es superior al que se tiene, por lo que parte de los conceptos no quedan bien asentados.

2.9 Técnicas de Optimización

En Técnicas de Optimización se estudian algunos de los principales modelos y métodos de Investigación Operativa. Para profundizar sobre estos conceptos, es positivo tener ciertas nociones sobre teoría de conjuntos y de topología. Entre las que aparecen en el temario están los conjuntos convexos, poliedros y politopos, puntos extremos y direcciones extremas y funciones convexas. Resulta importante el cálculo vectorial y matricial así como la interpretación gráfica y analítica de un problema de maximización o minimización con una serie de restricciones. El método explicado a lo largo de la asignatura es el simplex. Si bien es especialmente complejo, resulta necesario conocer, al menos, las transformaciones elementales de una matriz: intercambiar filas, multiplicación por un escalar y suma de filas para facilitar el desarrollo del procedimiento. Además, es necesario saber definir una semirrecta o un segmento para dar las posibles soluciones del problema.

2.10 Econometría I

Esta asignatura hace una introducción a la econometría. En ella estudian el modelo de regresión lineal simple y el múltiple, los cuales se estimarán por mínimos cuadrados ordinarios y se estudian los supuestos básicos de los que se estudiará su incumplimiento. Se realizan, además, varias demostraciones con las que el estudiante no está familiarizado. La asignatura no es difícil desde el punto de vista matemático, no obstante, requiere un nivel de abstracción superior al del estudiante.

2.11 Finanzas empresariales

Finanzas Empresariales no presenta dificultad matemática. Si bien utiliza operaciones para la obtención de los resultados de los problemas, los más complejos han sido vistos en Operaciones Financieras o bien consisten en la sustitución de datos en fórmulas. Con respecto al análisis gráfico, tampoco presenta una especial complejidad. El mayor inconveniente de un estudiante en esta asignatura es la interpretación de las fórmulas debido a que muchas utilizan sumatorios o doble sumatorio con los que no está familiarizado.

2.12 Comercio Internacional

La asignatura de Comercio internacional utiliza esencialmente conceptos de carácter macroeconómico y microeconómico para llevar a cabo su análisis, por lo que presenta las mismas necesidades matemáticas que estas materias. Hace uso de la representación gráfica para describir la realidad: funciones cóncavas para denotar los rendimientos decrecientes de los factores de producción, curvas de indiferencia convexas, etc. cuya correcta interpretación resulta imprescindible para entender gran parte de los fenómenos que se explican. Es importante distinguir los conceptos absoluto y relativo o la interpretación de la pendiente de la recta tangente a un punto.

2.13 Microeconomía III

Microeconomía III presenta un currículo bastante diferente a la I y a la II. El nivel aumenta de manera sustancial debido a que se introducen un gran número de conceptos nuevos, además de expresar de una manera más formal los ya aprendidos. Comienza el curso con relaciones binarias para definir el concepto de preferencia. El hecho de hablar de conjuntos, aplicaciones, relaciones binarias, etc., resulta complejo para el estudiante debido carece de base matemática en este campo.

Además, se hace uso del método de reducción al absurdo para contrastar la falsedad de una proposición y se realizan demostraciones y teoremas que el estudiante no es capaz de entender debido a que no está familiarizado. En el tema de equilibrios de Nash se utilizan matrices de pagos en la resolución de los ejercicios.

2.14 Economía Pública I

La asignatura de Economía Pública I presenta una base teórica sobre el gasto público. Para determinadas explicaciones hace uso de conceptos microeconómicos, por lo que es necesario el análisis gráfico y los conceptos de derivada, elasticidad, concavidad y convexidad de una función. Los contenidos matemáticos utilizados no resultan de especial complicación para los estudiantes debido a que los han utilizados anteriormente en las asignaturas de Microeconomía I y II.

2.15 Economía Europea

La asignatura de Economía Europea es esencialmente de naturaleza memorística. Presenta gráficos para representar los comportamientos macroeconómicos derivados del mercado común o la teoría de la unión aduanera, no obstante, los conceptos matemáticos utilizados son los mismos que en Microeconomía, Macroeconomía o Comercio Internacional.

2.16 Economía Pública II

Economía Pública II es una asignatura que estudia la teoría de la imposición. Es por ello que se usan conceptos matemáticos con cierta asiduidad como pueden ser el concepto de derivada, elasticidad, el cálculo e interpretación de índices, etc. Destaca también el análisis e interpretación gráfica. Además, existen ciertos índices que se calculan mediante fórmulas con sumatorios o productorios con los que los estudiantes pueden tener problemas.

2.17 Economía de las Organizaciones

Economía de las Organizaciones es la asignatura de continuación de Economía de la Empresa impartida en el primer semestre de primero. La finalidad en ambos casos es la misma, sin embargo, se profundizan los conocimientos y aumenta la dificultad de los problemas planteados.

Los cálculos matemáticos no son muy diferentes, no obstante, pueden ser más largo e incluyen algún concepto probabilístico que determina la aleatoriedad.

2.18 Macroeconomía III

Macroeconomía III presenta un temario completamente diferente a los de Macroeconomía I y Macroeconomía II. El temario está relacionado con el crecimiento económico por lo que plantea diversos modelos para explicarlos. Estos modelos no son lineales, sino que son la suma de varias funciones diferentes como la Cobb-Douglas, la logarítmica, la de elasticidad constante, etc. en diferentes periodos. El hecho de tratarse de un análisis dinámico y tener que poner en práctica métodos de optimización o incluso simples derivaciones de modelo resulta especialmente costoso. Además, hace límites y algunos infinitésimos.

2.19 Econometría II

La asignatura de econometría II presenta diferencias con respecto a la primera parte. Comienza el curso haciendo uso de operaciones con matrices, debiendo conocer la suma, el producto o el cálculo de la inversa. También resulta importante el hecho de saber pasar de un sistema de ecuaciones lineales a la forma matricial. El curso está basado en el análisis de series temporales, por lo que es necesario conocer qué es un proceso estocástico. Dentro de ello, hay que saber qué es un autorregresivo y un media móvil, así como las diferencias de una variable y si es o no estacionaria. El problema de esta asignatura es la falta de capacidad de abstracción que le permita comprender el proceso que está haciendo en cada momento.

Las demás asignaturas impartidas en el grado no están catalogadas como de “Formación Básica” u “Obligatorias” sino que tienen un carácter optativo.

3 Las asignaturas de matemáticas del grado

En tercer lugar y partiendo de la misma fuente que en la segunda etapa, se ha realizado un estudio sobre los contenidos matemáticos impartidos en las asignaturas de Matemáticas I y II y se ha evaluado si corresponden con las necesidades del estudiante durante sus estudios universitarios.

La asignatura de Matemáticas I impartida en el primer semestre de grado presenta cuatro bloques.

El primero de ellos corresponde al cálculo matricial y es utilizado esencialmente en las asignaturas de Economía Aplicada y Econometría.

El segundo bloque es el de cálculo diferencial. En él se encuentran contenidos como las funciones de una y varias variables así como su derivación, indispensable en las asignaturas de teoría económica como Macroeconomía o Microeconomía y otras que utilizan a las anteriores como puede ser Economía Pública II o Comercio Internacional.

En el bloque de optimización, encontramos explicados los procedimientos que posteriormente serán utilizados por las asignaturas de teoría económica y que suponen la base de la asignatura de Técnicas de Optimización.

El cuarto bloque corresponde al cálculo integral. Si bien se ve de una manera superficial, es imprescindible para el cálculo de áreas entre dos curvas, algo que se usa de manera reiterada en asignaturas como Microeconomía para calcular excedentes.

La asignatura de Matemáticas II se imparte en el segundo semestre de carrera. El contenido es nuevo para todos los estudiantes a diferencia del de Matemáticas I que tiene partes similares a las del bachiller de Ciencias. Se encuentra dividida en tres bloques.

El primero de ellos es el de álgebra. En el se enseñan los números complejos, utilizados en asignaturas como Econometría II o Técnicas de Optimización, además de profundizar en conceptos como la diagonalización de matrices o las formas cuadráticas.

El segundo bloque es el de sistemas dinámicos. Estos son utilizados en asignaturas como Econometría II o Macroeconomía III. También se enseñan ecuaciones diferenciales en el temario de esta última asignatura.

El último bloque corresponde a los sistemas dinámicos discretos. En él se explican las sucesiones y las series de números reales, utilizadas en Operaciones Financieras y en Macroeconomía III. Además, se enseñan ecuaciones lineales en diferencias y sistemas de estas ecuaciones.

Cabe destacar que si bien existen ciertos contenidos que después no se utilizan propiamente en las asignaturas, sí que se utilizarían en el caso de que el estudiante tuviese un mejor manejo de ellos.

En conclusión, mientras que la asignatura de Matemáticas I cubre las herramientas básicas para desenvolverse en la teoría económica, Matemáticas II complementa las herramientas que se utilizarán en los niveles más avanzados de estas asignaturas, si bien quedan cosas sin cubrir.

4 Entrevistas con estudiantes y profesores

En esta etapa se han llevado a cabo una serie de entrevistas con profesores del grado, Decano, Vicedecanas y Secretario de la Facultad, así como con ocho estudiantes del grado de Economía que se encuentran actualmente en los cursos de 3º y 4º. De las entrevistas se ha obtenido una visión de los diferentes agentes que intervienen en el aprendizaje matemático del estudiante tanto de forma directa (porque enseñan o aprenden esa asignatura) como indirecta (hacen uso de estos conocimientos matemáticos en sus asignaturas). Del mismo modo, estas entrevistas han permitido contrastar lo evaluado durante las dos primeras etapas del proyecto, así como ampliar ciertas cuestiones.

Las principales conclusiones obtenidas de las entrevistas son las siguientes:

El nivel de Matemáticas de los estudiantes depende del Bachiller del que se provenga. Si bien todos conocen unos mínimos, aquellos que han cursado un Bachiller de Ciencias tienen una base más sólida de análisis y álgebra lo que implica que la inmersión en el grado se da de una forma más lineal y tienen menos problema con la superación de asignaturas en el primer curso.

En cambio, entre los estudiantes que provienen de un Bachiller de Ciencias Sociales existen dos perfiles: aquellos que han presentado una buena trayectoria en el instituto y aquellos que han presentado dificultades en el aprendizaje matemático desde los primeros cursos de la ESO.

Los estudiantes que han ido bien previamente en el instituto no tienen problemas con la superación de las asignaturas de Matemáticas ni hacen uso de academias. No obstante, destacan que sí que existe una brecha con respecto a sus compañeros de Ciencias, que ya han visto gran parte de los contenidos de las asignaturas durante el propio Bachiller.

Son aquellos estudiantes que han sufrido problemas anteriormente los que tienen una mayor dificultad para aprobar la asignatura y tienen más problemas para adecuarse a los contenidos matemáticos del grado.

Otro de los principales problemas reside en aquellos que han cursado un Bachiller de Humanidades o han realizado un grado superior debido a que muchos de ellos no han visto ningún contenido matemático desde el último curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Por tanto, existe una divergencia dentro de las aulas del nivel con el que los estudiantes entran a la universidad. Esto se debe a que Economía es un grado al que se puede acceder desde perfiles de Bachiller muy diferentes por sus bajas notas de corte y cuyas ponderaciones para el cálculo de la nota de acceso permiten que estudiantes de Ciencias, Ciencias Sociales e incluso Humanidades puedan entrar de una forma sencilla.

Que las condiciones de partida sean diferentes hace que el propio grupo avance a diferentes ritmos, causando que los estudiantes que proceden de Ciencias se manejen con soltura y aquellos que provienen de Ciencias Sociales u otros bachilleres se encuentren con problemas.

Además, parte de las herramientas matemáticas utilizadas en cursos superiores no quedan cubiertas por la actual oferta de asignaturas de Matemáticas, si bien lo que sí es impartido resulta indispensable.

Son los últimos niveles de las asignaturas de Teoría Económica y las del ámbito de los métodos cuantitativos las que presentan una mayor dificultad para los estudiantes. Si bien es cierto que son aquellas que precisan de una mayor capacidad de abstracción, parte de sus contenidos no han sido vistos anteriormente por lo que se dificulta su comprensión. Esto lleva a que el propio estudiante, conforme avanza en el grado, tenga la percepción de que le falta base matemática para superar de manera correcta los niveles más altos de las asignaturas del ámbito más cuantitativo. Este hecho queda contrastado al evaluar la materia impartida en estas asignaturas.

Las principales carencias provienen de un cambio del lenguaje utilizado en la rama, en la falta de conocimiento de la teoría de conjuntos, el poco control de los procesos dinámicos o de las iteraciones y de la falta de la familiarización con los teoremas y las demostraciones.

Existe un cambio brusco entre los primeros niveles de Macroeconomía y la Macroeconomía III, Microeconomía II y Microeconomía III y Econometría I y II. El cambio del lenguaje en el que se expresan las cuestiones hace que el estudiante se encuentre perdido y da lugar a un salto debido a que la formalización se convierte en una exigencia en tercero, en vez de haberse dado desde primero un aprendizaje gradual.

Esta formalización lleva al uso de la Teoría de Conjuntos en asignaturas como Microeconomía III para describir los principales conceptos y relaciones que se dan dentro del temario. Debido a que el estudiante no ha visto más allá de nociones muy básicas de esta Teoría durante su etapa preuniversitaria, encuentra en estas definiciones un obstáculo.

Del mismo modo, el desarrollo de teoremas con su correspondiente demostración, así como el tener que demostrar la veracidad o falsedad de una proposición por el método de reducción al absurdo resulta complejo para alguien que tiene dificultades de por sí para entender una proposición lógica.

La falta de estas herramientas matemáticas es causante de un ritmo más lento de impartición de las clases. La solución es aumentar el número de horas impartidas, ya sea mediante un aumento del número de créditos en las asignaturas ya establecidas en el grado o bien con mediante la creación de una nueva asignatura.

Conclusiones

> *Es necesario que las Matemáticas de Ciencias estén a disposición de un Bachiller de Ciencias Sociales para aquellos estudiantes que pretendan estudiar Economía, con el objetivo de conseguir unas condiciones de partida igualitarias.*

El bachiller de Ciencias tiene un enfoque más conceptual que permite al estudiante desarrollar una mayor capacidad de abstracción y entender mejor los fundamentos teóricos de la materia. Es por ello que es formativamente necesario que los estudiantes del grado de Economía cursen, al menos, la asignatura de Matemáticas del Bachiller de Ciencias.

Resultaría aún más satisfactorio que los temarios de Bachiller de ambas asignaturas fueran diferentes y pudiesen tener un carácter complementario. Esto ayudaría a que el estudiante pudiese aprender las bases formales del álgebra y del análisis y a su vez tener una visión de la aplicación práctica de estas herramientas.

Del mismo modo, es necesario que el estudiante tenga la información suficiente para determinar por qué tipo de Bachiller va a poder desarrollar de una manera más correcta sus posteriores estudios de grado debido a que la rama a la que pertenece la asignatura de Bachiller correspondiente al grado que quiere cursar, Economía, se encuentra en el Bachiller de Ciencias Sociales.

Corrigiendo esto, se consigue que los estudiantes accedan al Grado mejor formados, en las mismas condiciones de partida y que el avance del grupo se dé de manera más homogénea.

Se recomienda la implantación de al menos una tercera asignatura de Matemáticas en los dos primeros cursos de grado que aporte nuevas herramientas necesarias en cursos superiores.

La existencia de solo dos asignaturas de 6 ECTS de Matemáticas resulta insuficiente para un estudiante de Economía.

Es necesaria la implantación de una tercera asignatura durante el segundo curso de carrera que solucione la falta de familiarización con el lenguaje formal, la carencia de conocimientos sobre Teoría de Conjuntos y que amplíe el desarrollo de los modelos dinámicos.

Además, puede completarse el temario con el estudio de las principales funciones que se estudian en Economía, profundizar en la interpretación del análisis gráfico o dar ciertas nociones para modelizar los comportamientos de un agente económico.

Con ello se consigue que el estudiante pueda comprender de manera satisfactoria lo enseñado en los niveles más elevados de Teoría Económica, amplíe su capacidad de abstracción y sea capaz de utilizar las matemáticas como una herramienta para describir los fenómenos empíricos que observa.

Referencias

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (LOE). (BOE núm. 106 de 4 de mayo de 2006).

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013, para la Mejora de la Calidad Educativa. (LOMCE). (BOE núm. 295, de 10 de diciembre de 2013).

Aprender matemáticas a través del juego
Propuesta: Scratch & Singapur[6]

María Bernal García (*Experta Universitaria* en Matemáticas en EP)

Resumen

Presentamos una propuesta para trabajar algunos aspectos matemáticos del currículum de Educación Primaria de la forma en la que se trabajan en el modelo de Singapur, pero utilizando, además, la herramienta digital Scratch, que permite la programación por bloques. Se trata de un juego con una serie de retos que los alumnos tienen que resolver por grupos en el ordenador hasta llegar a descubrir el mapa entero de Singapur y encontrar un tesoro escondido en este país. Cada prueba superada descubre una provincia nueva en la que aparece un personaje distinto, que les mostrará las instrucciones de la prueba siguiente. La propuesta está dirigida a grupos de alumnos de diferentes edades, por lo que los grados de dificultad de los retos que aparecen son variados.

Palabras clave

Educación Primaria, matemáticas, juego, Scratch, Singapur.

Introducción

Se presenta en este trabajo un videojuego matemático diseñado mediante la herramienta online Scratch.

La idea de este videojuego surgió gracias a un curso de postgrado, *Experto en Matemáticas en Educación Primaria*, impartido durante el curso 2016/2017 a través de la Fundación Universidad-Sociedad, vinculada a la Universidad Pública de Navarra. Fue el último día de clase cuando decidimos recoger los conocimientos que habíamos ido aprendiendo a lo largo del curso y plasmarlos en un proyecto final a través de la herramienta Scratch. El resultado fue un videojuego cuyo propósito es trabajar la resolución de problemas matemáticos de una manera lúdica y entretenida, basándonos en el modelo de Singapur.

1 El método Singapur

Tal y como hemos mencionado en la introducción, los problemas matemáticos de nuestro juego están basados en el método Singapur. No obstante, ¿en qué consiste este método?

El método Singapur es una propuesta para la enseñanza de las matemáticas desarrollada por el país que le da nombre a principios de los años 80. Esta metodología surgió en respuesta a una necesidad de mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje matemático.

Los expertos en educación de Singapur que desarrollaron este método se centraron en la elaboración de un plan de estudios que promoviese las habilidades necesarias para permitir un aprendizaje continuo y desarrollar un pensamiento creativo. La finalidad era que los alumnos fuesen capaces de aportar soluciones a retos aún desconocidos.

Así pues, el método Singapur se caracteriza por los siguientes rasgos, que desarrollaremos brevemente:

[6] Bernal, M. (2018). Aprender matemáticas a través del juego. Propuesta: Scracht & Singapur. En J.J. Jiménez, A. Lasa (Eds.), *V Jornadas de enseñanza de las matemáticas en Navarra*, 57-62. Pamplona: UPNA.

- *Progresión en espiral*. Un currículo en espiral implica reforzar conocimientos ya conocidos a través de la enseñanza de nuevos conceptos. A diferencia de un currículo lineal en el cual vamos avanzando y progresando en los contenidos sin mirar atrás, un currículo en espiral vuelve constantemente a retomar contenidos ya dados, reafirmándolos, repasándolos y profundizando en ellos con el fin de construir una base con una estructura sólida en la que asentar nuevos conocimientos. La idea del currículo en espiral fue desarrollada por Jerome Bruner, y está relacionada con la siguiente característica: el enfoque CPA.

- *Enfoque CPA*. Otra de las aportaciones de Bruner al método Singapur es el enfoque CPA, cuyas siglas corresponden a Concreto, Pictórico y Abstracto. Este enfoque introduce la comprensión de los conceptos matemáticos haciendo pasar a los alumnos por tres procesos (figura 1): Enactivo (o Concreto), Icónico (o Pictórico) y Simbólico (o Abstracto). La finalidad del enfoque C-P-A es que los alumnos no solo sean capaces de resolver un problema, sino también que entiendan realmente lo que están haciendo y puedan aplicar los conocimientos aprendidos a nuevas situaciones. Para ello, en el primer proceso enactivo o concreto, los alumnos trabajan con materiales manipulativos, como regletas Cuisenaire o policubos. Una vez han trabajado con este tipo de materiales, se pasa al siguiente proceso, el icónico o pictórico. Este proceso es un puente hacia lo abstracto en el que los niños tienen la oportunidad de dibujar imágenes que representen lo que ya han visto manipulativamente en el paso anterior con el fin de resolver un problema. Serán capaces de llegar al último proceso, el abstracto, una vez hayan practicado lo suficiente manipulativa y gráficamente como para entender lo que están haciendo realmente y puedan explicar qué están haciendo y por qué.

- *Resolución de problemas*. Es uno de los rasgos más importantes del método Singapur y es planteado como el eje del aprendizaje matemático. La enseñanza tradicional de las matemáticas es que esté estructurada de la siguiente manera. En primer lugar, se enseña a los alumnos a calcular y operar a través de algoritmos para después introducir resolución de problemas de un solo paso. Más adelante, se incrementa la dificultad aumentando la complejidad del problema añadiendo varios pasos. Al estar los problemas relacionados con los algoritmos enseñados en primer lugar, los niños buscan rápidamente los datos en el problema para aplicar dicho algoritmo sin pararse a pensar en por qué lo están aplicando. El método Singapur, en cambio, pretende enseñar estrategias no rutinarias de resolución de problemas no rutinarias que hagan que el alumno pueda resolver el problema de formas distintas, siempre comprendiendo el porqué de lo que está haciendo. De esta manera, se deja de enseñar cálculo y resolución de problemas de manera procedimental y se pasa a enseñar múltiples estrategias de resolución válidas para situaciones variadas. Resolver un problema tiene que significar que el alumno ha comprendido y asimilado correctamente lo que está haciendo, y no solamente que ha memorizado una serie de fórmulas. Así pues, el maestro debe entender que lo importante no es que el resultado obtenido sea el correcto, sino que el niño haya entendido el camino que ha seguido para la consecución de ese resultado. Tal y como se señala en el libro “Why Before How (2011)”, nunca diríamos que una persona es un lector competente basándonos solamente en su capacidad para recitar palabras. Con las matemáticas ocurre lo mismo. Es la comprensión la que debería ser nuestra meta en matemáticas. Para ello, algunas de las estrategias de resolución de problemas que se emplean son:

  - El modelo de barras, directamente relacionado con la fase pictórica del enfoque CPA (figura 2).
  - Representar el problema a través de un “teatro”.
  - Escribir reflexiones matemáticas (figura 3).
  - Resolver el problema dividiéndolo en partes.

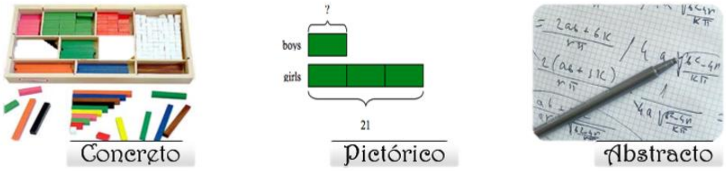


Figura 1. Enfoque CPA.

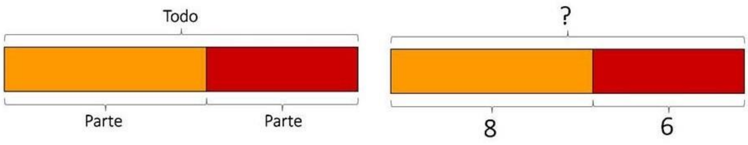


Figura 2. Modelo de barras.

Nº de flores en cada ramo	X	Nº de ramos	=	Nº total de flores

Figura 3. Reflexión matemática.

2 El videojuego

A continuación, pasaremos a comentar el videojuego desarrollado mediante la herramienta Scratch.

2.1 Historia y dinámica de juego

El juego ha sido programado con la herramienta Scratch y nos cuenta la historia de cómo una arqueóloga llamada Abby es enviada a Singapur en busca de una corona. La historia comienza en el Museo Británico de Londres, en donde el director llama a la arqueóloga Abby, nuestra protagonista, para encargarle que encuentre la corona del príncipe Sang Nila Utama. Este le explica la leyenda en torno a la corona y la envía, junto a su ayudante Burton, a buscarla. Una vez lleguen a Singapur, comenzarán a preguntar a la gente del lugar por la corona. Estos les darán distintas pistas que les conducirán a la corona en caso de que resuelvan los acertijos matemáticos que ellos les plantean.

En el videojuego, al igual que ocurre en la realidad, Singapur se encuentra dividido en cinco distritos. Nuestros protagonistas inicialmente llegan al distrito suroeste, pintado de azul en la siguiente imagen, y a medida que los personajes con los que se encuentren les den nuevas pistas, recorrerán los cinco distritos, teniendo que resolver un problema matemático en cada uno de ellos (figura 4).

Tras varios problemas, que pueden verse en el enlace al juego situado después del apartado de conclusiones, se encontrarán con una anciana que les desvelará la verdadera historia que está detrás de la leyenda del príncipe. La dinámica del juego es muy sencilla. Está basada en videojuegos de misterio y puzles como la famosa saga del “Profesor Layton”. Funciona únicamente a través de diálogos entre los personajes y acertijos matemáticos (figura 5).

Como podemos ver en las dos siguientes imágenes, se emplea el modelo de barras, típico del método Singapur, para la resolución del problema. El niño tiene que resolver cada uno de los acertijos que se le planteen si quiere continuar con la historia. Una vez ha completado con éxito el problema, se explica con detenimiento el razonamiento seguido para la resolución del problema (figura 6).

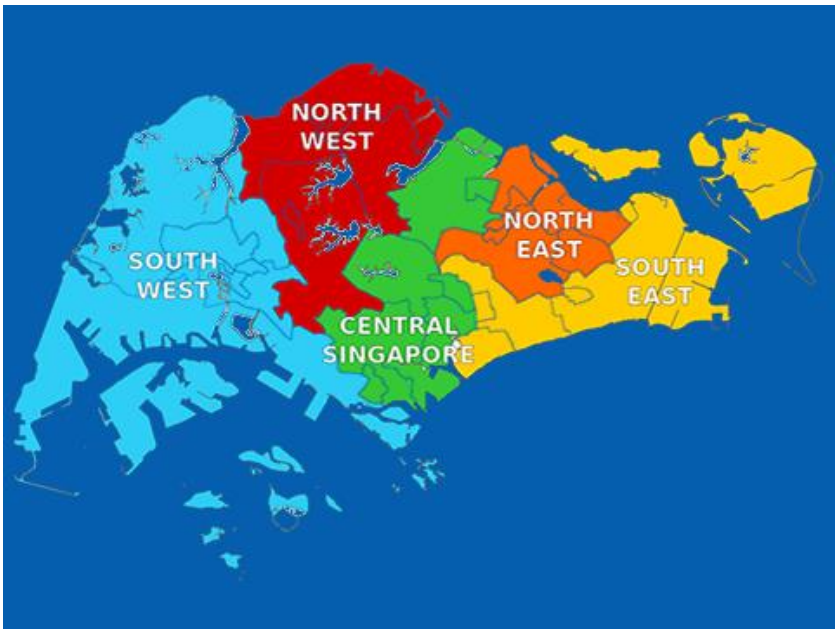


Figura 4. Representación de Singapur en el juego.

Figura 5. Ejemplo de diálogo.

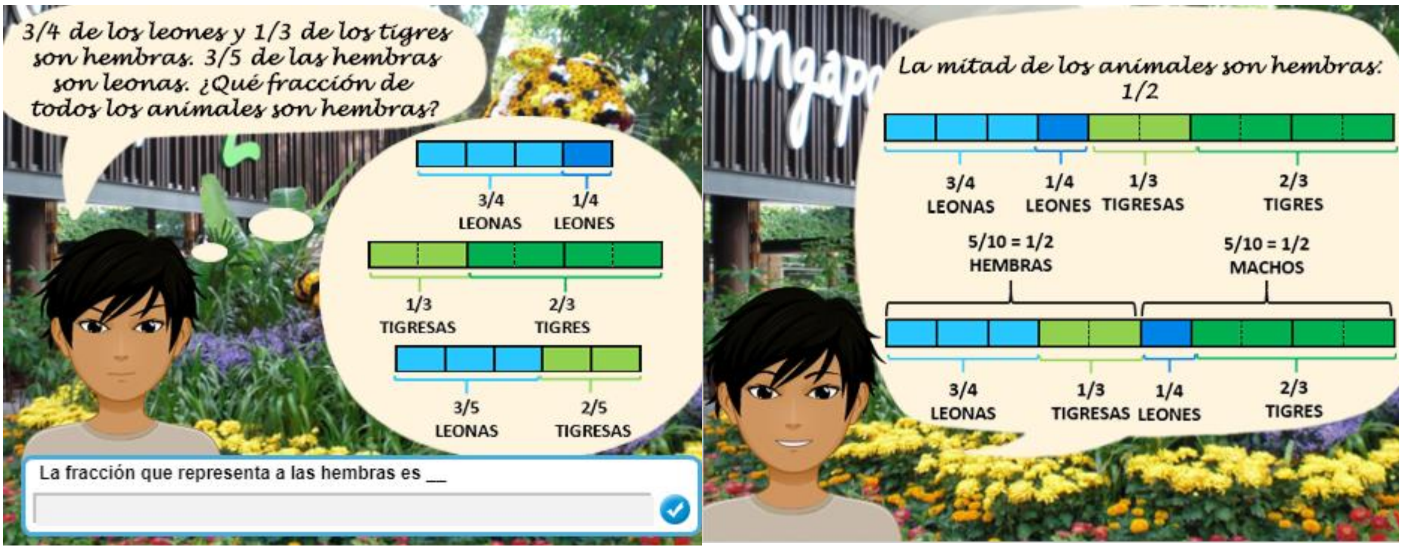


Figura 6. Ejemplo de problema: planteamiento y resolución.

2.2 Scratch y otras herramientas empleadas

Nuestro videojuego, como ya hemos mencionado previamente, está diseñado con la herramienta online Scratch (figura 7), un programa muy sencillo y relativamente fácil de usar. Scratch permite usar una programación dirigida por eventos con múltiples objetos activos sin necesidad de saber lenguaje de programación.

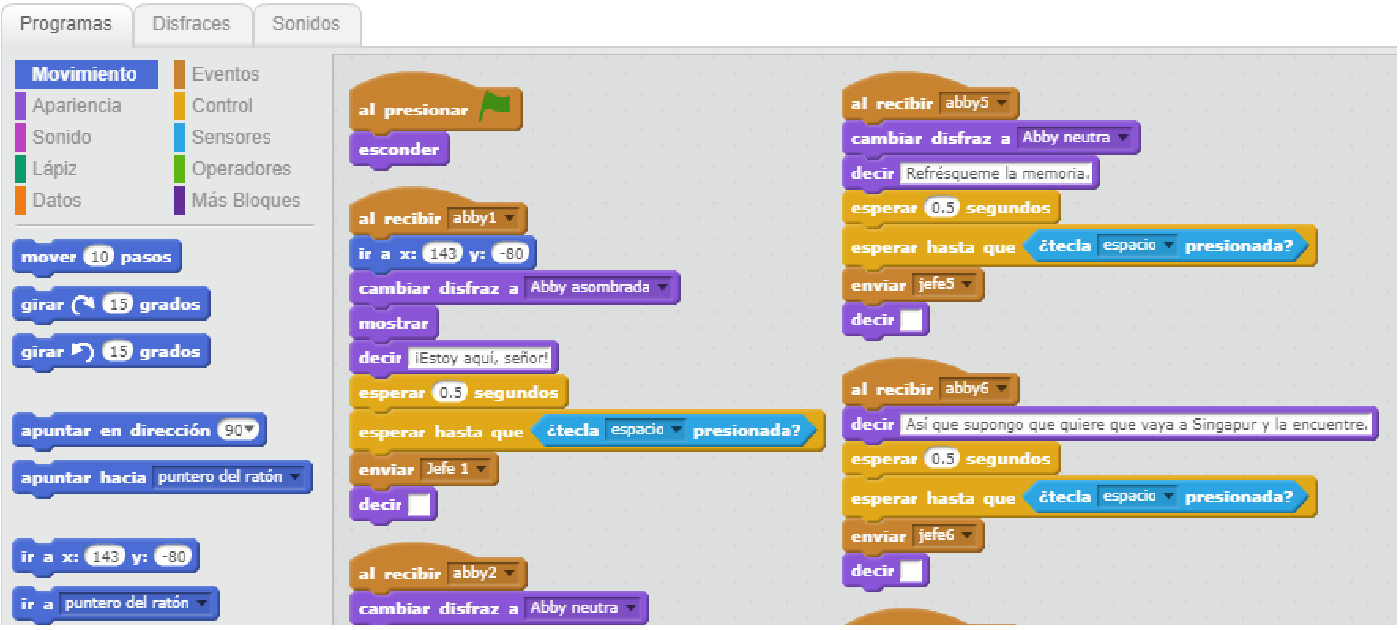


Figura 7. El programa Scratch.

Aunque en este caso Scratch se haya empleado como herramienta docente para crear un juego para el alumno, también puede ser utilizada por el propio alumno para creaciones propias y, de este modo, desarrollar habilidades propias del pensamiento computacional mediante el aprendizaje de la programación.

Otras herramientas empleadas han sido:

- El programa Photoshop para el diseño de los fondos, los rótulos y el retoque de alguna imagen.
- “Pixton”, un recurso online dirigido a la creación de cómics que hemos empleado para ilustrar la leyenda de Sang Nila Utama.
- “Avatar in Pixels”, recurso online empleado para el diseño de los avatares de Abby y Burton.
- “Crear un avatar”, recurso online utilizado para el diseño de todos los personajes.
- Imágenes de Singapur obtenidas de Google Imágenes.

Conclusiones

Durante el desarrollo de nuestro videojuego, hemos tenido en cuenta una serie de aspectos didácticos y hemos podido plantear algunas ideas acerca de las posibilidades que el juego podría llegar a tener.

Por una parte, debido al nivel de dificultad de los acertijos matemáticos propuestos, el juego está dirigido a niños de 5º o 6º de primaria que ya hayan trabajado previamente con el método Singapur. Sin embargo, esto no es una limitación, ya que los acertijos pueden adaptarse sin problema a niveles más básicos, o incluso aumentarlo para niveles de la ESO.

Por otra parte, el juego puede aprovecharse como herramienta para trabajar distintos temas matemáticos. De momento, el juego solo consta de 5 problemas, uno por cada distrito de Singapur. Sin embargo, la idea es ampliarlo de manera que a cada distrito se le asigne un tema matemático diferente. Por ejemplo, el distrito central podría estar dedicado a las fracciones y el sureste al cálculo de superficies. En todos los casos empezaríamos con ejercicios de niveles básicos e iríamos aumentando la dificultad conforme se avanza en la historia.

Por último, el juego puede servir para trabajar aspectos de otras áreas, no solo de la de matemáticas. El aspecto central del juego son las matemáticas y la resolución de problemas, no obstante, es interesante el hecho de que la protagonista sea una arqueóloga londinense que visita Singapur, ya que con ello no solo abarcamos el área de matemáticas, sino que se trabajan también de forma indirecta aspectos de otras áreas, como la de ciencias sociales. Un ejemplo de ello es que, a través del juego, los niños pueden situar los distintos distritos de Singapur en el mapa, conocer diferentes lugares de interés dentro del país, ciertas leyendas del lugar, etc.

En conclusión, este videojuego, que todavía está en fase de desarrollo, puede llegar a ser una herramienta útil y entretenida planteando distintos tipos de problemas y ejercicios a los estudiantes de una forma atractiva y variada para ellos. A las actividades ya diseñadas, podrían añadirse algunas más dentro de nuevas sub-tramas de la historia principal, que ampliarían y enriquecerían el juego.

Referencias y web-grafía

Enlace al videojuego: https://scratch.mit.edu/projects/163329142/

Avatarsinpixels.com. (2017). *Avatars In Pixels.* [Disponible en (29/11/2017): http://www.avatarsinpixels.com/].

Baldridge, S.; Parker, T. (2004). *Elementary Mathematics for Teachers*. Okemos, Michigan: Sefton-Ash Publishing.

Bruner, J. (2000). *The process of Education*. Cambridge, MA: Havard University Press.

Crearunavatar.com. (2017). *Crea avatares online y gratis.* [Disponible en (29/11/2017): http://crearunavatar.com/].

Curriculum Planning & Development Division (Sin fecha), *Primary Mathematics* (1-6). Singapur: Marshall Cavendish Education.

Hazekamp, J. (2011). *Why Before How: Singapore Math Computation Strategies*. Londres: Crystal Springs Bools.

Inc., P. (2017). *Pixton Comic Maker*. Pixton. [Disponible en (29/11/2017): https://www.pixton.com].

Matemáticas Método Singapur. (2017). *Metodología de Matemáticas Método Singapur.* [Disponible en (29/11/2017): http://singapur.polygoneducation.com/index.php/matematicas-singapur/].

Scratch.mit.edu. (2017). *Scratch - Imagine, Program, Share.* [Disponible en (29/11/2017): https://scratch.mit.edu/].